Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

BAREM - CLASA A XII-A

Problema 1. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{pn+r}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2pk-2p+r}{2pn},$$

atunci când $0 < r < 2p$.

Dorel I. Duca

Soluţie. Fie r şi p astfel încât $0 < r < 2p$. Deoarece pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem

$$\frac{k-1}{n} < \frac{2pk-2p+r}{2pn} < \frac{k}{n},$$

. . . 1 punct

deducem că

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2pk-2p+r}{2pn}$$

este sumă Riemann ataşată funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sin x$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, diviziunii

$$\Delta^n = \left(0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$$

. . . 1 punct

şi sistemului de puncte intermediare

$$\xi^n = \left(\frac{r}{2pn}, \frac{r+2p}{2pn}, \ldots, \frac{2p(n-1)+r}{2pn}\right)$$

. . . 2 puncte

Întrucât funcţia f este continuă, deducem că f este integrabilă Riemann şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2pk-2p+r}{2pn} = \int_0^1 \sin x \,\mathrm{d}\,x = 1-\cos 1.$$

. . . 1 punct

Pe de altă parte,

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{pn+r} = \frac{1}{p}.$$

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{pn+r}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2pk-2p+r}{2pn} = \frac{1}{p}(1-\cos 1).$$

. . . 1 punct

Problema 2. Fie $p \not\equiv 1 \pmod 3$ un număr prim şi $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo p. Să se determine cardinalul mulţimii

$$X = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_p)^3 \mid x^{2019}+y^3+z^3=0\right\}.$$

Dorin Andrica şi George Ţurcaş

Soluţie.

Se cunoaşte că $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\},\cdot)$ este un grup ciclic de ordin $p-1$.

. . . 1 punct

Considerăm funcţia $f:\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ dată de $x \mapsto x^3$. Evident $f(0)=0$ şi $f(x)\neq 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$. Presupunem că $x,y \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ sunt în aşa fel încât $f(x)=f(y)$. Atunci $(xy^{-1})^3=1$, dar cum $3 \nmid p-1$ ştim că in grupul $(\mathbb{Z}_p\setminus\{0\},\cdot)$ nu există elemente de ordinul 3, deci $x=y$. Am demonstrat că f este injectivă, deci bijectivă.

. . . 3 puncte

Acum, pentru orice valori date $x,y \in \mathbb{Z}_p$, deoarece f este bijectivă, există unic $z \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât $f(z)=-x^{2019}-y^3$. Deci, cardinalul mulţimii X este egal cu numărul de perechi $(x,z)\in(\mathbb{Z}_p)^2 \Rightarrow |X|=p^2$.

. . . 3 puncte

Problema 3. Să se calculeze

$$\int_1^{2019}(x-1)\cdot\dots\cdot(x-2019)\,\mathrm{d}\,x.$$

***

Soluţie. Aplicăm substituţia $u = x - 1010$ şi integrala de calculat devine

$$\int_{-1009}^{1009} (u-1009)\cdot(u-1008)\cdot\dots\cdot u\cdot(u+1)\cdot\ldots(u+1009)du.$$

...3 puncte

Funcţia $f(x) = \prod_{i=-1009}^{1009}(x-i) = x\cdot\prod_{i=1}^{1009}(x^2-i^2)$ este o funcţie impară.

...2 puncte

Domeniul de integrare este simetric faţă de 0, deci integrala de calculat este nulă.

...2 puncte

Problema 4. Spunem că grupul $(G,\cdot)$ are proprietatea (P) dacă G are $6n$ elemente şi orice subgrup propriu al său are 2 elemente sau 3 elemente.

a) Determinaţi grupurile comutative care au proprietatea (P).

b) Dacă G este necomutativ şi are proprietatea (P), arătaţi că

$$Z(G) = \{e\},$$

unde e este elementul neutru din G şi $Z(G) = \{y \in G \mid xy = yx, \forall x \in G\}$.

Mihai Piticari, Mariean Andronache

Soluţie. a) Deoarece 2 şi 3 sunt divizori primi a lui $6n$, conform teoremei lui Cauchy rezultă că G conţine elemente de ordin 2 şi elemente de ordin 3. Fie $x, y \in G$ cu $ord(x) = 2$ şi $ord(y) = 3$.

...1 punct

Cum G este comutativ rezultă că $ord(xy) = 6$. Fie H subgrupul generat de xy. Cum $ord(H) = 6$ şi G are proprietatea (P) rezultă că H nu poate fi subgrup propriu, deci $H = G$, adica G este un grup ciclic cu 6 elemente, prin urmare G este izomorf cu $(\mathbb{Z}_6, +)$.

...2 puncte

b) Se ştie că $Z(G)$ este subgrup în G. Cum G nu este comutativ, $Z(G) \neq G$. Dacă $Z(G) \neq \{e\}$, atunci $Z(G)$ este subgrup propriu a lui G.

...1 punct

Cum G are proprietatea (P), deducem că $ord(Z(G)) = 2$ sau $ord(Z(G)) = 3$.

Dacă $ord(Z(G)) = 2$, atunci $Z(G) = \{e, a\}$ cu $ord(a) = 2$ şi considerăm un element $y \in G\backslash Z(G)$ cu $ord(y) = 3$. Cum $ay = ya$, rezultă că $ord(ay) = 6$.

Ca la punctul a), deducem că G este grup ciclic şi de aici rezultă că G este comutativ, absurd!

...1 punct

Dacă $ord(Z(G)) = 3$, atunci $Z(G) = \{e, b, b^2\}$, cu $ord(b) = 3$ şi considerăm un element $x \in G \setminus Z(G)$ cu $ord(x) = 2$. Cum $bx = xb$ rezultă că $ord(ay) = 6$. Ca la punctul a) deducem că G este grup ciclic şi de aici rezultă că G este comutativ, absurd!

...1 punct

În concluzie, $Z(G) = \{e\}$.

Finalizare **...1 punct**