Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

CLASA A XI-A

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $\operatorname{Tr} A = 2018$ şi $\det A = 2019$. Demonstraţi că

$$\det(A^2 + 2017I_2) + \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 2019I_2) = 4.$$

Problema 2. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$x|f(y)| + y|f(x)| = y|x| + f(x)|f(y)|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x) + f\left(\frac{n}{n+1}x\right)$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) funcţia f este bijectivă;

ii) pentru orice număr natural nenul n, funcţia f_n este bijectivă.

Problema 4. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_{2019}(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 + B^2 + C^2 = AB + BC + CA$. Să se demonstreze că

$$\det([A, B] + [B, C] + [C, A]) \leq 0,$$

unde $[X, Y] = XY - YX$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore.*

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

BAREM - CLASA A XI-A

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $\operatorname{Tr} A = 2018$ şi $\det A = 2019$. Demonstraţi că

$$\det(A^2 + 2017I_2) + \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 2019I_2) = 4.$$

Traian Tămîian

Soluţie. Notând $n = 2018$, $\det A = n+1$ şi relaţia de demonstrat devine:

$$\det(A^2 + (n-1)I_2) + \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + (n+1)I_2) = 4.$$

Fie $f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A) = x^2 - nx + n + 1$ polinomul caracteristic al matricei A.

Din teorema Hamilton-Cayley rezultă:

$$A^2 - nA + (n+1)I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + (n+1)I_2 = nA. \qquad (1)$$

. . . 1 punct

Din (1) rezultă $\det(A^2 + (n+1)I_2) = n^2 \det A = n^2(n+1)$.

. . . 1 punct

Tot din (1) obţinem: $A^2 + (n-1)I_2 = nA - 2I_2 = n(A - \frac{2}{n}I_2)$, de unde rezultă

$$\det(A^2+(n-1)I_2) = n^2 \det(A - \frac{2}{n}I_2) = n^2 f_A(\frac{2}{n}) = n^2 \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 - n \cdot \frac{2}{n} + n + 1 \right] =$$
$$= n^2 \left(\frac{4}{n^2} + n - 1 \right).$$

. . . 2 puncte

Folosind (1) rezultă $A^2 + I_2 = n(A - I_2)$, de unde

$$\det(A^2 + I_2) = n^2 \det(A - I_2) = n^2 f_A(1) = 2n^2.$$

. . . 2 puncte

Din relaţiile de mai sus, obţinem:

$$\det(A^2 + (n-1)I_2) + \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + (n+1)I_2) =$$
$$= (n^3 - n^2 + 4) + 2n^2 - (n^3 + n^2) = 4.$$

. . . 1 punct

Problema 2. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$x|f(y)| + y|f(x)| = y|x| + f(x)|f(y)|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Bogdan Blaga

Soluţie. Pentru $x = y = 0$ obţinem $f(0) = 0$. Presupunem că există $x_0 \neq 0$ cu $f(x_0) = 0$. Pentru $x = y = x_0$ se obţine $x_0|x_0| = 0$, contradiţie. Deci $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

. . . 1 punct

Cum f este continuă, deducem că păstrează semn constant pe $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$.

. . . 2 puncte

Presupunem că $f(x) > 0$, $\forall x > 0$.

Pentru $y = x > 0$, obţinem $2xf(x) = x^2 + f^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$, $\forall x > 0$.

. . . 1 punct

Dacă $f(x) < 0, \forall x > 0$ atunci pentru $y = x > 0$ deducem $f(x) = (1 - \sqrt{2})x$, $\forall x > 0$.

. . . 1 punct

Analog, dacă $f(x) < 0$, $\forall x < 0$, obţinem $f(x) = x$, $\forall x < 0$, şi dacă $f(x) > 0$, $\forall x < 0$ deducem $f(x) = (1 - \sqrt{2})x$, $\forall x < 0$.

. . . 1 punct

Astfel se obţin 4 funcţii

$$f_1(x) = x, f_2(x) = (1 - \sqrt{2})x, f_3(x) = \begin{cases} x, x < 0 \\ (1 - \sqrt{2})x, x \geq 0 \end{cases},$$

$$f_4(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ (1 - \sqrt{2})x, x < 0 \end{cases}$$

Se verifică că doar f_1 convine punând $y = -x > 0$.

. . . 1 punct

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x) + f\left(\frac{n}{n+1}x\right)$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) funcţia f este bijectivă;

ii) pentru orice număr natural nenul n, funcţia f_n este bijectivă.

Mihai Piticari si Vladimir Cerbu

Soluţie. Observăm mai întai că toate funcţiile f_n sunt continue şi că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 2f(x)$.

. . . 1 punct

i) $\Rightarrow$ *ii)* Deoarece f este bijecţie continuă rezultă că f este strict monotonă.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă funcţia f este strict crescă toare, atunci f_n este strict crescătoare, deci f_n este funcţie injectivă.

. . . 1 punct

Deoarece f este surjectivă rezultă că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ şi cum f este crescătoare deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Atunci avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$. Ţinând cont că f_n este continuă obţinem $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, adică f_n este surjectivă.

În concluzie toate funcţiile f_n sunt bijective. (Analog pentru cazul f strict descrescătoare)

. . . 1 punct

ii) $\Rightarrow$ *i)* Deoarece funcţia f este continuă rezultă că $f(\mathbb{R})$ este interval. Dacă funcţia f nu este surjectivă atunci f este mărginită inferior sau mărginită superior. Aşadar există $m \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$ sau există $M \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$, şi atunci $f_n(x) \geq 2m$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sau $f_n(x) \leq 2M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $f_n(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$, adică f_n nu este surjectivă, absurd!

În concluzie funcţia f este surjectivă.

. . . 1 punct

Deoarece toate funcţiile f_n sunt bijecţii continue rezultă că toate funcţiile f_n sunt strict monotone. Există o infinitate de valori n pentru care funcţiile f_n corespunzătoare sunt toate strict crescătoare sau toate strict descrescătoare. Pentru fixarea ideilor, presupunem că există $A \subseteq \mathbb{N}^*$, A mulţime infinită, astfel încât pentru orice $n \in A$ funcţia f_n este strict crescătoare.

. . . 2 puncte

Dacă f nu este strict crescătoare există un interval pe care f este constantă, adică există $c \in \mathbb{R}$ şi $[a, b] \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c$, $\forall x \in [a, b]$. Cum A este mulţime infinită, există $\alpha, \beta \in [a, b]$ şi $n \in A$ astfel încât $\frac{n}{n+1}\alpha, \frac{n}{n+1}\beta \in [a, b]$, dar atunci $f_n(\alpha) = f_n(\beta) = 2c$, ceea ce contrazice faptul că f_n este injectivă. Aşadar f este strict crescătoare, prin urmare f este funcţie crescătoare, prin urmare f ete injectivă. **. . . 1 punct**

Problema 4. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_{2019}(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2+B^2+C^2 = AB+BC+CA$. Să se demonstreze că

$$\det\left([A,B]+[B,C]+[C,A]\right) \leq 0,$$

unde $[X,Y] = XY - YX$.

Dorin Andrica

Soluţie. Fie w o rădăcină a unităţii. Avem

$$(A+wB+w^2C)(A+w^2B+wC) =$$

$$= A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA-w(AB-BA+AC-CA+BC-CB)$$

...2 puncte

Deoarece $A^2+B^2+C^2 = AB+BC+CA$, obţinem

$$(A+wB+w^2C)(A+w^2B+wC) = -w\left([A,B]+[B,C]+[C,A]\right)$$

...2 puncte

Prin trecere în determinanţi, rezultă

$$|\det(A+wB+w^2C)|^2 = \det(A+wB+w^2C)\cdot\overline{\det(A+wB+w^2C)} =$$

$$= \det\left((A+wB+w^2C)(A+w^2B+wC)\right) = (-w)^{2019}\cdot\det([A,B]+[B,C]+[C,A]) =$$

$$= -\det\left([A,B]+[B,C]+[C,A]\right).$$

Cum $|\det(A+wB+w^2C)|^2 \geq 0$, rezultă concluzia.

...3 puncte