Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

BAREM - CLASA A X-A

Problema 1. Să se demonstreze că nu există numere reale x astfel încât
$\log_3\left(3+\log_3 x+\log_3\left(\log_3 x\right)\right)=1+\sqrt[3]{\left(\log_3 \log_3 x\right)\cdot\left(\log_3 \log_3 \log_3 x\right)}$.

Dorel I. Duca

Soluţie. Presupunând că x verifică relaţia,

. . . 1 punct

atunci folosind de două ori inegalitatea mediilor obţinem

$$\log_3\left(3+\log_3 x+\log_3\left(\log_3 x\right)\right)-1=$$
$$=\log_3 \frac{3+\log_3 x+\log_3 \log_3 x}{3} \geq \text{(inegalitatea mediilor)}$$

. . . 2 puncte

$$\geq \log_3 \sqrt[3]{3\left(\log_3 x\right)\left(\log_3 \log_3 x\right)}=$$
$$=\frac{1+\left(\log_3 \log_3 x\right)+\left(\log_3 \log_3 \log_3 x\right)}{3} \geq \text{(inegalitatea mediilor)}$$
$$\geq \sqrt[3]{\left(\log_3 \log_3 x\right)\left(\log_3 \log_3 \log_3 x\right)}.$$

. . . 2 puncte

Aşadar, în inegalităţile aplicate trebuie să avem egalitate; urmează că trebuie să avem

$$3=\log_3 x=\log_3 \log_3 x$$

. . . 1 punct

şi

$$1=\log_3 \log_3 x=\log_3 \log_3 \log_3 x,$$

ceea ce este imposibil. Prin urmare, ecuaţia dată nu are soluţii reale.

. . . 1 punct

Problema 2. Pe laturile (BC), (CD), (DA), (AB) ale patrulaterului convex $ABCD$ se consideră respectiv punctele A_1, B_1, C_1, D_1 astfel încât $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{B_1C}{B_1D}=\frac{C_1D}{C_1A}=\frac{D_1A}{D_1B}$. Dacă M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$, arătaţi că $MNPQ$ este paralelogram dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Traian Tămîian

Soluţie. Notând cu $k > 0$ valoarea comună a rapoartelor din ipoteză rezultă

$$a_1 = \frac{b+kc}{1+k}, b_1 = \frac{c+kd}{1+k}, c_1 = \frac{d+ka}{1+k}, d_1 = \frac{a+kb}{1+k}$$

. . . 2 puncte

$$m+p = \frac{a+a_1}{2} + \frac{c+c_1}{2} = \frac{a+\frac{b+kc}{1+k}}{2} + \frac{c+\frac{d+ka}{1+k}}{2},$$

de unde $m+p = \frac{(a+c)(2k+1)+b+d}{2(1+k)}$ **. . . 1 punct**

$n+q = \frac{b+b_1}{2} + \frac{d+d_1}{2} = \frac{b+\frac{c+kd}{1+k}}{2} + \frac{d+\frac{a+kb}{1+k}}{2}$

$n+q = \frac{(b+d)(2k+1)+a+c}{2(1+k)}$ **. . . 1 punct**

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $MNPQ$ este paralelogram dacă şi numai dacă $m+p = n+q \Leftrightarrow a+c = b+d \Leftrightarrow ABCD$ este paralelogram.

. . . 3 puncte

Problema 3. Fie $m, n \geq 2$ numere naturale. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ cu proprietatea că pentru orice $p \in \{1,2,\ldots,n\}$, există şi este unic $k_p \in \{1,2,\ldots,n\}$ astfel încât

$$f(p) = f(1)f(k_p).$$

Bogdan Blaga

Soluţie. Pentru $p = 1$, deducem că există un unic $k_1 \in \{1,\ldots,n\}$ cu $f(1) = f(1)f(k_1)$ de unde $f(k_1) = 1$.

. . . 1 punct

Pentru $p = k_1$, deducem că există un unic $k_{k_1} \in \{1,\ldots,n\}$ cu $f(k_1) = f(1)f(k_{k_1})$, de unde $1 = f(1)f(k_{k_1})$, deci $f(1) = 1$.

. . . 1 punct

Pentru orice $p \in \{1,\ldots,n\}$ există şi este unic $k_p \in \{1,\ldots,n\}$ astfel încât

$$f(p) = f(k_p).$$

Se deduce că f este injectivă. Pentru aceasta este necesar ca $m \geq n$.

. . . 2 puncte

Reciproc, pentru $m \geq n$ orice funcţie injectivă cu $f(1) = 1$ verifică ipoteza. Aceste funcţii sunt în număr de A_{m-1}^{n-1}.

. . . 2 puncte

În concluzie, numărul căutat este 0 pentru $m < n$ şi A_{m-1}^{n-1} pentru $m \geq n$.
. . . 1 punct

Problema 4. Să se calculeze

$$E = \left(1 + \mathrm{tg}^4 \frac{\pi}{5}\right)\left(1 + \mathrm{tg}^4 \frac{2\pi}{5}\right).$$

Dorin Andrica şi George Ţurcaş

Soluţie. Din formula lui De Moivre avem $\cos 5t + i \sin 5t = (\cos t + i \sin t)^5$
. . . 1 punct

deci obţinem

$$\sin 5t = \sin^5 t - 10 \cos^2 t \sin^3 t + 5 \cos^4 t \sin t.$$

. . . 1 punct

Considerând $t = \frac{\pi}{5}$ şi $t = \frac{2\pi}{5}$ rezultă că $x_1 = \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{5}$ şi $x_2 = \mathrm{tg}^2 \frac{2\pi}{5}$ sunt rădăcinile trinomului $f(x) = x^2 - 10x + 5$,

. . . 2 puncte

deci pentru orice $x \in \mathbb{C}$ avem

$$f(x) = x^2 - 10x + 5 = (x - \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{5})(x - \mathrm{tg}^2 \frac{2\pi}{5}).$$

. . . 2 puncte

Prin urmare

$$\left(1 + \mathrm{tg}^4 \frac{\pi}{5}\right)\left(1 + \mathrm{tg}^4 \frac{2\pi}{5}\right) = f(i) f(-i) = (4 - 10i)(4 + 10i) = 4^2 + 10^2 = 116.$$

. . . 1 punct