Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

CLASA A VII-A

Problema 1. Să se determine cifrele $a < b < c < d < e$ ştiind că $5 \notin \{a, b, c, d, e\}$ şi toate numerele de sub radicalii din egalitatea

$$\sqrt{\overline{bde}} + \sqrt{\overline{bed}} + \sqrt{\overline{edb}} = \sqrt{\overline{bccc}} + \sqrt{\overline{caa}}$$

sunt pătrate perfecte.

Problema 2. Fie M o mulţime de numere reale care verifică simultan următoarele relaţii:
a) $1 \in M$;
b) $x \in M \Rightarrow x^2 \in M$;
c) $(x^2 - 4x + 4) \in M \Rightarrow x \in M$.
Să se arate că $2018 + \sqrt{2019} \in M$.

Problema 3. În patrulaterul convex $ABCD$, diagonalele AC şi BD se intersectează într-un punct M astfel încât $AM = MC$ şi $DM = 2MB$. Punctele X şi Y sunt pe segmentele (MC) şi respectiv (BC) astfel încât

$$\frac{AC}{MX} = \frac{BY}{YC} = 3.$$

Demonstraţi că punctele D, X şi Y sunt coliniare.

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi H ortocentrul său. Considerăm D mijlocul laturii $[BC]$. Perpendiculara în H pe DH intersectează AB în P şi AC în Q. Să se demonstreze că H este mijlocul segmentului $[PQ]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore*.

BAREME clasa a 7-a

Problema 1

Din condiția ca numerele de sub radical să fie pătrate perfecte și cum $5 \notin \{a,b,c,d,e\}$ rezultă că $\{a,b,c,d,e\} = \{0,1,4,6,9\}$ ---------- 1p

Deoarece $a<b<c<d<e$ obținem $a=0$, $b=1$, $c=4$, $d=6$, $e=9$ singura posibilă soluție ------ 1p

În acest caz avem

$$\sqrt{\overline{bde}} + \sqrt{\overline{bed}} + \sqrt{\overline{edb}} = \sqrt{169} + \sqrt{196} + \sqrt{961} =$$

$$= 13 + 14 + 31 = 58$$ ---------- 2p

și $\sqrt{\overline{bccc}} + \sqrt{\overline{caa}} = \sqrt{1444} + \sqrt{400} = 38 + 20 = 58$

Rezultă că egalitatea din enunț este verificată ---- 2p

În concluzie cifrele cerute sunt $a=0$, $b=1$, $c=4$, $d=6$, $e=9$ ---------- 1p

Problema 2 cls. a 7-a

$x \in M \Rightarrow (x+2-2)^2 \in M \Rightarrow (x+2)^2 - 4(x+2) + 4 \in M$ 2p

$\left.\begin{array}{r} x+2 \in M \\ 1 \in M \end{array}\right\} \Rightarrow$ M conține toate numerele impare pozitive, deci $2019 \in M$ 2p

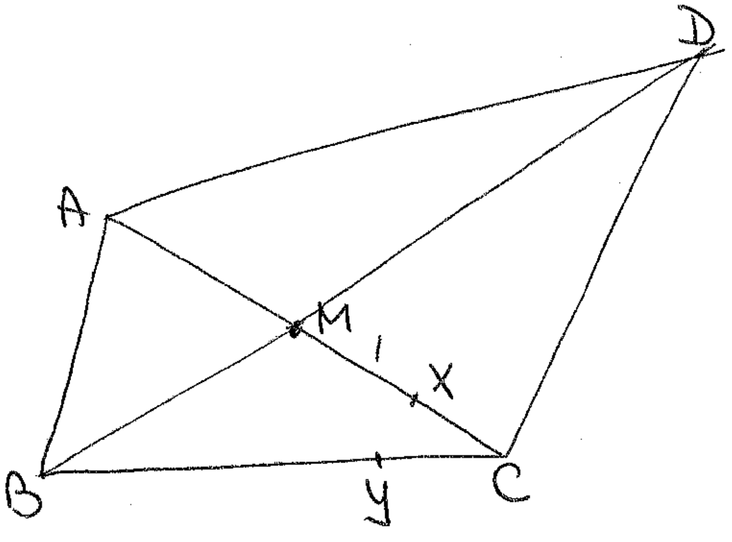
$\left[(\sqrt{2019}+2)-2\right]^2 \in M \Rightarrow \sqrt{2019}+2 \in M$ 2p

$\left.\begin{array}{r} \sqrt{2019}+2 \in M \\ x+2 \in M \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2019} + \underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{1009 \text{ ori}} =$

$= \sqrt{2019} + 2018 \in M$ 1p

Problema 3 cls. a 7-a BAREM

Desen ------- 1p



Avem $\frac{DM}{BD}=\frac{DM}{BM+MD}=\frac{2MB}{3MB}=\frac{2}{3}$ (1) ------ 1p

Apoi $\frac{CX}{XM}=\frac{CM-XM}{XM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{XM}-1=\frac{1}{2}\cdot 3-1=\frac{1}{2}$ (2) ------- 2p

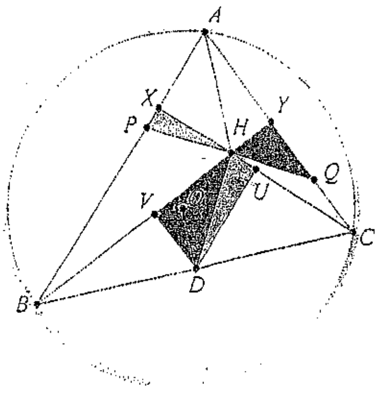
Considerăm ΔMBC și punctele D, X și Y

Știind că $\frac{BY}{YC}=3$ și folosind (1) și (2) obținem

$$\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CX}{XM}\cdot\frac{MD}{DB}=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$$ ------- 2p

În baza reciprocei teoremei lui Menelaus obținem punctele D, X și Y coliniare. ------- 1p.

Problema 4 cls. a 7-a



Desen 1p

Fie X și Y picioarele înălțimilor din C și B și U, V picioarele perpendicularelor din D pe CX, respectiv BY 1p

Avem $\Delta HPX \sim \Delta DHU$ și $\Delta HQY \sim \Delta DHV$ 2p

Rezultă $\frac{HP}{DH} = \frac{HX}{DU} = \frac{2HX}{BX} = \frac{2HY}{CY} = \frac{HY}{DV} = \frac{HQ}{DH}$ 2p

Deci H este mijlocul segmentului [PQ] 1p