Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

CLASA A VI-A

Problema 1. Aflaţi numerele naturale care au 8 divizori naturali şi produsul lor este 331776.

Problema 2. Să se determine toate numerele naturale care pot fi scrise sub forma

$$\frac{m+n+2}{mn+1},$$

unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3. Se consideră triunghiul EBC, $m(\angle EBC) = 90°$. Punctul A este situat pe segmentul (EC) astfel încât $BE = BA$, punctul D este situat pe segmentul (AC), astfel încât $\angle DBA \equiv \angle DBC$, iar $F \in CE$ astfel încât $FB \perp BD$. Arătaţi că

$$a) AD = EF; \quad b) m(\angle ADB) = 45°.$$

Problema 4. Determinaţi toate dreptunghiurile, cu lungimile laturilor exprimate în numere naturale, pentru care aria şi perimetrul se exprimă prin acelaşi număr.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *2 ore.*

BAREME CLASA VI-A

Problema 1

Aflați numerele naturale care au 8 divizori naturali și produsul lor este 331776.

Soluție:

Fie x – numărul și $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 < d_7 < d_8$ - divizorii, cu $d_1 = 1$ și $d_8 = x$ 1p

Fiindcă $d_1 \cdot d_8 = d_2 \cdot d_7 = d_3 \cdot d_6 = d_4 \cdot d_5 = x$, avem:

$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 \cdot d_5 \cdot d_7 \cdot d_8 = (d_1 \cdot d_8) \cdot (d_2 \cdot d_7) \cdot (d_3 \cdot d_6) \cdot (d_4 \cdot d_5) = x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$ 2p

Deci $x^4 = 331776 \iff x^4 = 24$ 1p

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ și $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 24 = 331776$ 1p

Vasile Șerdean
Gherla

Problema 2

Să se determine toate numerele naturale care pot fi scrise sub forma $\frac{m+n+2}{mn+1}$, unde m, n $\in \mathbb{N}^*$.

Dorel I. Duca

Soluție:

Pentru ca numărul $\frac{m+n+2}{mn+1}$ să fie natural trebuie să avem $m+n+2 \geq mn+1$. 2p

Deducem că trebuie să avem $(n-1)(m-1) \leq 2$ (1) 1p

Inegalitatea (1) este adevărată pentru:

a) n = 1 și orice m $\in \mathbb{N}^*$,
b) n = 2 și m $\in \{1, 2, 3\}$,
c) n = 3 și și m $\in \{1, 2\}$ 1p

sau

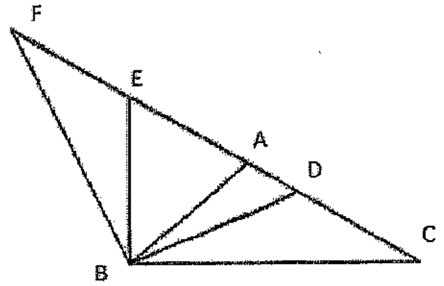
a') n = 1 și orice m $\in \mathbb{N}^*$,
b') n = 2 și m $\in \{1, 2, 3\}$, ... 1p
c') n = 3 și și m $\in \{1, 2\}$.

a) Pentru n = 1, obținem k = $\frac{m+3}{m+1} = 1 + \frac{2}{m+1}$, care este natural numai dacă m = 1; în acest caz obținem k = 2. Analog a'); rezultă n = m = 1 și k = 2.
b) Pentru n = 2, obținem k = $\frac{m+4}{2m+1}$, care este natural numai dacă m = 3 ; în acest caz obținem k = 1. Analog b') ; rezultă m = 2, n = 3, k = 1.
c) Pentru n = 3, obținem k = $\frac{m+5}{3m+1}$, care este natural numai dacă m = 2 ; în acest caz obținem k = 1. Analog c') ; rezultă m = 3, n = 2, k = 1. .... 2p

Așadar, numerele natural care se pot reprezenta sub forma cerută sunt 1 și 2.

Problema 3

Soluție:



a) Din [AB] ≡ [BE] rezultă $\measuredangle$ BAE ≡ $\measuredangle$ BEA => $\measuredangle$ BAD ≡ $\measuredangle$ BEF (1) 1p

m($\measuredangle$ ABD) =m($\measuredangle$ DBC) = 90^0 - m($\measuredangle$ EDB) 1p

m($\measuredangle$ FBE) = 90^0 - m($\measuredangle$ EDB) 1p

Deducem că $\measuredangle$ ABD ≡ $\measuredangle$ EBF (2) 1p

Din (1) și (2) și [AB] ≡ [BE] rezultă că $\triangle EBF \equiv \triangle ABD$ de unde AD = EF 1p

b) Din $\triangle EBF \equiv \triangle ABD$ deducem că $\measuredangle$ BFD ≡ $\measuredangle$ FDB 1p
Rezultă că $\triangle FBD$ dreptunghic isoscel => m($\measuredangle$ ABD) = 45^0

Problema 4

Notăm lungimile laturilor cu x și y. Avem xy = 2x + 2y adică x(y – 2) = 2y 2p

de unde $x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2y-4+4}{y-2} = \frac{2(y-2)}{y-2} + \frac{4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}$ 2p

Deoarece x și y sunt numere naturale trebuie ca $\frac{4}{y-2}$ să fie natural adică (y – 2) | 4 ......2p

Obținem $y \in \{3, 4, 6\}$ și atunci obținem un dreptunghi cu lungimea de 6 unități și lățimea de 3 unități și un pătrat cu latura de 4 unități. 1p