Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

CLASA A V-A

Problema 1. Arătaţi că există $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}^*$, distincte, astfel încât

$$2019^{2021} = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4.$$

Problema 2. Se scriu pe o tablă, în ordine crescătoare, toate numerele naturale de la 1 până la 2019 inclusiv. Numărul 1 se şterge. Se numără următoarele cinci numere, iar 7 se şterge. Se numără următoarele cinci numere şi următorul se şterge. Se continuă astfel până la ultimul număr.

a) Care este cel de-al 203-lea număr şters?

b) Aflaţi ultimele trei cifre ale sumei primelor 200 de numere neşterse.

Problema 3. Arătaţi că fracţia

$$\frac{33 \cdot 2^{3n} \cdot 35^n - 14^{n+1}}{58 \cdot 2^{3n} \cdot 5^n - 2^n}$$

se simplifică cu 19, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2013}$ numere naturale nenule. Arătaţi că numărul

$$A = 2014^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{2013}+a_1)} - 6$$

are cel puţin trei divizori diferiţi de 1.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *2 ore.*

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

BAREM - CLASA A V-A

Problema 1. Arătaţi că există $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}^*$, distincte, astfel încât

$$2019^{2021} = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4.$$

Vasile Şerdean

Soluţie. Cum $2019 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4$, avem: — 3p

$$2019^{2021} = 2019^{2020} \cdot 2019 = 2019^{2020} \cdot (1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4).$$ — 2p

Putem considera $a = 2019^{505} \cdot 1$, $b = 2019^{505} \cdot 2$, $c = 2019^{505} \cdot 3$, $d = 2019^{505} \cdot 5$, $e = 2019^{505} \cdot 6$. — 2p

Problema 2. Se scriu pe o tablă, în ordine crescătoare, toate numerele naturale de la 1 până la 2019 inclusiv. Numărul 1 se şterge. Se numără următoarele cinci numere, iar 7 se şterge. Se numără următoarele cinci numere şi următorul se şterge. Se continuă astfel până la ultimul număr.

a) Care este cel de-al 203-lea număr şters?

b) Aflaţi ultimele trei cifre ale sumei primelor 200 de numere neşterse.

Prof. Cristian Petru Pop

Soluţie. a) Numerele şterse au forma $6k + 1, k \in \mathbb{N}$. ...**2 puncte**

Al 203-lea număr şters este $6 \cdot 202 + 1 = 1213$. ...**2 puncte**

b) Suma primelor 200 de numere neşterse va fi:

$S = 1 + 2 + \cdots + 240 - (1 + 7 + 13 + \cdots + 235)$ ...**2 puncte**

$S = 24200$, deci ultimele trei cifre sunt $2, 0, 0$. ...**1 punct**

Problema 3. Arătaţi că fracţia

$$\frac{33 \cdot 2^{3n} \cdot 35^n - 14^{n+1}}{58 \cdot 2^{3n} \cdot 5^n - 2^n}$$

se simplifică cu 19, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Gheorghe Lobonţ

Soluţie. După simplificare, obţinem fracţia:

$$\frac{7^n \cdot (33 \cdot 20^n - 14)}{58 \cdot 20^n - 1}.$$ — 3p

Cum $20^n = (19+1)^n = M_{19} + 1$, efectuând calculele, obţinem cerinţa. ----- 4p

Problema 4. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2013}$ numere naturale nenule. Arătaţi că numărul

$$A = 2014^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{2013}+a_1)} - 6$$

are cel puţin trei divizori diferiţi de 1.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Exponentul $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\ldots(a_{2013} + a_1)$ este număr par deoarece din trei numere naturale cel puţin două au aceeaşi paritatea şi atunci cel puţin o paranteză este număr par. 3p Cum ultima cifra a lui 4^{2k} este 6, deducem că ultima cifra a lui A este 0. 2p Atunci A se divide cu 2, cu 5 şi cu 10, prin urmare are cel puţin trei divizori diferiţi de 1. —— 2p