Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XIX-a, Turda, 29-30 martie 2019
Matematică

BAREM - CLASA A IX-A

Problema 1. Se fixează numărul întreg pozitiv n. Care este numărul maxim k de submulţimi nevide în care poate fi partiţionată mulţimea $\{1, \ldots, n\}$ astfel încât sumele elementelor din fiecare submulţime să fie egale. De exemplu pentru $n = 10$, partiţia $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$, ne arată că în acest caz numărul k este cel puţin 3.

***

Soluţie. Pentru n par, observăm că există partiţia $\{1, n\}, \ldots, \{n/2, (n+2)/2\}$, unde $k = n/2$.

... 1 punct

Pentru n impar, avem partiţia $\{n\}$, $\{1, n-1\}, \ldots, \{(n-1)/2, \frac{n+1}{2}\}$, unde $k = (n+1)/2$.

... 2 puncte

Vom demonstra că aceste valori pentru ale lui k sunt optime.

Ştim că suma tuturor elementelor este $n(n+1)/2$. Apartenenţa lui n la una dintre submulţimi ne ajută să conchidem că suma elementelor din fiecare submulţime este cel puţin n. Deci $k \cdot n \leq n(n+1)/2$, de unde $k \leq (n+1)/2$. Exemplul aflat anterior rezolvă problema în cazul in care n este impar.

... 2 puncte

Pentru n par, deoarece k este numar întreg, inegalitatea anterioară poate fi întarită la $k \leq n/2$, iar exemplul găsit mai sus demonstrează că această valoare este optimă.

... 2 puncte

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia $f(x) = f^2(\{x\}) - f([x]) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin $\{x\}$ şi $[x]$ am notat partea fracţionară, respectiv partea întreagă a numărului real x.

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

$x = 0 \Rightarrow (f(0) - 1)^2 = 0$, de unde deducem $f(0) = 1$.

... 1 punct

Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $f(x) = f^2(0) - f(x) + 1$, deci $f(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

... 1 punct

Relaţia din enunţ devine $f(x) = f^2(\{x\})$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Deoarece $\{x+1\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că

$$f(x+1) = f^2(\{x+1\}) = f^2(\{x\}) = f(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică funcţia f este periodică cu perioadă 1.

. . . 3 puncte

Este suficient să determinăm f pe intervalul $[0,1)$. Cum $\{x\} = x$, $\forall x \in [0,1)$, rezultă că $f(x) = f^2(x)$, adică $f(x) = 0$ sau $f(x) = 1$, pentru orice $x \in [0,1)$.

Restricţia funţiei f la intervalul $[0,1)$ este $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$, unde A este o submulţime arbitrară a intervalului $(0,1)$.

. . . 2 puncte

Problema 3. Pentru $n \geq 3$ un număr întreg, găsiţi minimul expresiei $a_1 + \cdots + a_n$ ştiind că $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ sunt numere reale cu proprietatea $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 1$.

***

Soluţie. Pentru $n = 3$ se observă

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) =$$

$$= 1/2(a_1^2 + a_2^2) + 1/2(a_2^2 + a_3^2) + 1/2(a_3^2 + a_1^2) + 2 \geq 3.$$

Egalitatea are loc pentru $a_1 = a_2 = a_3 = 1/\sqrt{3}$.

. . . 1 punct

Pentru $n = 4$, avem că

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = (a_1 + a_3)^2 + (a_2 + a_4)^2 + 2 \geq$$

$$\geq 2[(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)] + 2 = 4.$$

Egalitatea are loc pentru $a_1 = a_2 = 0$ c si $a_3 = a_4 = 1$.

. . . 1 punct

Dacă $n \geq 5$, atunci

$$a_1a_3 + a_2a_4 \cdots + a_{n-1}a_1 + a_na_2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_{n-1}[(a_1 - a_n) + a_n] + a_na_1$$

$$= a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 + a_{n-1}(a_1 - a_n).$$

. . . 1 punct

Avem că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1} + 2\sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+2} + \sum_{i-j \neq \pm 1, \pm 2 \pmod{n}} a_ia_j$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} + 2a_{n-1}(a_1 - a_n) =$$

$$a_2^2 + \cdots + a_{n-2}^2 + 4 + (a_{n-1} + a_1 - a_n)^2 + 2a_1 a_n \geq 4.$$

. . . 3 puncte

Egalitatea se obţine pentru $a_1 = \cdots = a_{n-2} = 0$ şi $a_{n-1} = a_n = 1$.
Deci minimul expresiei este $\sqrt{3}$ pentru $n = 3$, respectiv 2 pentru $n \geq 4$.

. . . 1 punct

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, O centrul cercului său circumscris şi H ortocentrul. Considerăm D mijlocul laturii $[BC]$. Perpendiculara în H pe DH intersectează AB în P şi AC în Q. Să se demonstreze că

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{OD}.$$

Mihaela Berindeanu

Soluţie. Fie X şi Y picioarele înălţimilor din C şi B, iar U, V picioarele perpendicularelor din D pe CX, respectiv BY.

. . . 2 puncte

Avem $\triangle HPX \sim \triangle DHU$ **. . . 1 punct**

şi $\triangle HQY \sim \triangle DHV$. **. . . 1 punct**

Rezultă

$$\frac{HP}{DH} = \frac{HX}{DU} = \frac{2HX}{BX} = \frac{2HY}{CY} = \frac{HY}{DV} = \frac{HQ}{DH}.$$

. . . 2 puncte

Deci H este mijlocul segmentului $[PQ]$.

. . . 1 punct