**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ**
**COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ**
**„*MARIAN ȚARINĂ*"**

**EDIȚIA A VI-A**  **12 – 13 MAI 2006**

# CLASA a V-a

**I.** Să se arate că numărul

A= $\left(2\cdot 2^{2}\cdot 2^{97}+3^{50}\cdot 9^{25}\right)\cdot\left[\left(4^{25}\right)^{2}+\left(3^{10}\right)^{10}\right]$ este pătrat perfect.

*Gherasim Feurdean*

**II.** Arătați că dacă $17\,|\,\overline{bba}$ şi $17\,|\,\overline{abb}$, atunci $17\,|\,\overline{b0a}$.

*Gheorghe Lobonț*

**III.** Determinați cel mai mare număr natural *n*, pentru care numărul

A= $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2004\cdot 2005\cdot 2006$ se divide cu $29^{n+11}$.

*Vasile Şerdean*

**IV.** Să se determine a, b, c, d ştiind că $\{a,b,6\}$, $\{b,c,7\}$, $\{c,d,8\}$, $\{d,a,9\}$ sunt submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{a,b,c,d\}$.

*Vasile Şerdean*

<u>**NOTĂ**</u> **:** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore*

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ**
**COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ**
**„*MARIAN ȚARINĂ*"**

**EDIȚIA A VI-A**  **12 – 13 MAI 2006**

# CLASA a VI-a

**I.** Se consideră numerele naturale *a, b, c.*

a) Dacă $a$=6 şi $c$=15, determinați numărul $b$ astfel încât *a, b, c* să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi.

b) Dacă *a, b, c* sunt direct proporționale cu numerele 5, 12, 13 arătați că $c^2 = a^2 + b^2$.

*Ioan Groza*

**II.** a) Rezolvați în $Z \times Z$ ecuația

$$x^2 - xy - y = 62$$

b) Arătați că numărul $a = 169^{n+7} + 144^{n+5}$ nu este pătrat perfect.

*Monica Fodor şi Daniel Moldovan*

**III.** Se consideră triunghiul dreptunghic *ABC* cu unghiul drept în *A* şi măsura unghiului *B* de $75^o$. Dacă $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ şi $AD = 10\,cm$, calculați aria triunghiului *ABC*.

*Vasile Şerdean*

**IV.** Se consideră mulțimile egale *A* şi *B*,

$$A = \{1, 2, 3, ..., 98, 99\} \text{ şi } B = \{a_1, a_2, ..., a_{98}, a_{99}\}.$$

Arătați că mulțimea $C = \{|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, ..., |a_{99} - 99|\}$ are cel mult 98 de elemente.

(S-a notat $|x|$ modulul numărului real x).

*Mariana Ursu*

<u>**NOTĂ**</u> **:** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore.*

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ**
**COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ**
**„*MARIAN ȚARINĂ*"**

**EDIȚIA A VI-A**

**12 – 13 MAI 2006**

# CLASA a VII-a

**I.** Să se arate că numărul $5+3\sqrt{3}$ nu poate fi pătratul unui număr real de forma $a+b\sqrt{3},$ cu $a,b\in Q.$

*Mariana Ursu*

**II.** Să se determine $n\in N^*$, astfel încât

$$\frac{2\sqrt{n}-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{n}}\in Z\ .$$

*Mariana Ursu şi Gheorghe Lobonț*

**III.** În triunghiul *ABC*, bisectoarea unghiului *BAC* intersectează pe *BC* în *E*. Paralela prin *E* la *AC* intersectează pe *AB* în *D*, iar paralela prin *E* la *AB* intersectează pe *AC* în *F*.

1. a) Determinați natura patrulaterului *ADEF*

   b) Arătați că $EF=\dfrac{AB\cdot AC}{AB+AC}$

   c) Arătați că $EF\le\dfrac{\sqrt{AB\cdot AC}}{2}$

2. Fie *P, Q* simetricele punctului *E* față de punctele *D* şi respectiv *F*.
   Demonstrați că punctele *P, A, Q* sunt coliniare.

*Ioan Groza*

**IV.** Diagonalele patrulaterului convex *ABCD* se intersectează în *O*. Ştiind că aria triunghiului *AOB* este 16, iar aria triunghiului *COD* este 25, arătați că aria patrulaterului *ABCD* este mai mare sau egală cu 81.

*Vasile Şerdean*

<u>**NOTĂ :**</u> *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ**
**„*MARIAN ȚARINĂ*”**

**EDIȚIA A VI-A**  **12 – 13 MAI 2006**

# CLASA a VIII-a

**I.** **a)** Dacă $\frac{(5n)^3-1}{3}=(5n+1)(5n+2)$, arătați că $(5n)^3+(5n+1)^3=(5n+2)^3$.

**b)** Dacă *a, b, c* sunt lungimile laturilor unui triunghi şi verifică relația

$(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(b-a+c)^2\le a+b+c$, atunci aria triunghiului este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

*Grigore Tarța şi Monica Fodor*

**II.** Fie $x=\overline{a_1a_2...a_n}$ şi $x^3=\overline{b_1b_2...b_m}$ numere naturale în baza 10.

Considerăm mulțimile $M_y=\{y\in N \mid y=m+n\}$ şi $A=\{2003,2004,2006\}$.

Stabiliți dacă $A\subset M_y$.

*Mariana Ursu*

**III.** Se consideră trapezul *ABCD*, cu $AB\parallel CD$, dreptunghic în *A*.

Fie *AB=a, BC=a+b, CD=b (a>b>0).*

Pe planul trapezului se ridică perpendiculara *AE=a-b.*

**a)** Determinați poziția dreptei *DC* față de planul (*EAB*).

**b)** Calculați distanța de la punctul *E* la dreapta *DC*.

**c)** Arătați că dreapta *DN* este perpendiculară pe planul (*EAN*), unde $N\in(BC)$, astfel încât *AB=BN.*

*Ioan Groza*

**IV.** Fie *MABC* un tetraedru oarecare şi $R\in(MA)$, $E\in(MB)$, $P\in(MC)$.

**a)** demonstrați că $\frac{V_{MREP}}{V_{MABC}}=\frac{MR\cdot ME\cdot MP}{MA\cdot MB\cdot MC}$, unde cu $V_{MREP}$ s-a notat volumul tetraedrului *MREP,* iar cu $V_{MABC}$ volumul tetraedrului *MABC.*

**b)** Folosind eventual punctul *a)* demonstrați că pentru orice $a,b,c\in\left[0,\sqrt{2}\right]$ şi $x,y,z\in[0,2]$, avem inegalitatea :

$$x\left(\sqrt{2}-a\right)(2-z)+y(2-x)\left(\sqrt{2}-c\right)+z(2-y)\left(\sqrt{2}-b\right)+2abc\le 4\sqrt{2}$$

*Vasile Şerdean*

**NOTĂ :** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

**MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ**
**COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ**
***„MARIAN ȚARINĂ"***

**EDIȚIA A VI-A**  **12 – 13 MAI 2006**


# CLASA a IX-a

**I.** Dacă $x,y,z \in (0,\infty)$, $2x+y+5z=2$ şi $2xy+10xz+5yz=1$ să se arate că:

$$x \in \left[0,\frac{2}{3}\right],\quad y \in \left[0,\frac{4}{3}\right],\quad z \in \left[0,\frac{4}{15}\right].$$

*Vasile Şerdean*

**II.** Fie *A, B, C, D* patru puncte distincte în plan şi *E* un punct situat pe dreapta *AB*. Se consideră $F \in CD$ astfel încât $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ şi punctul *G* în planul (*ABC*) care satisface condițiile $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$ şi $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EC}$. Ştiind că $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ să se determine numărul real $\alpha$ astfel încât $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}$ unde *K* este punctul de intersecție al dreptelor *AB şi DG.*

***

**III.** Fie $M \in \{1,2,...,p\}$, p număr prim. Fiecărei submulțimi $A \subset M$ îi asociem numărul $N(A)=p^{-1}card(A)$. Determinați toate perechile (*A,B*) unde $A \subset M$, $B \subset M$ cu proprietatea $N(A \cap B)=N(A)N(B)$.

*Octavian Agratini*

**IV.** Fie *P* un punct în interiorul triunghiului *ABC* şi $\alpha = \sphericalangle ABC$, $\beta = \sphericalangle CPA$, $\gamma = \sphericalangle APB$. Să se arate că

$$\frac{PA}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{PB}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{PC}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

*Dorin Andrica şi Titu Andreescu*

<u>**NOTĂ**</u> **:** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ**
**COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ**
***„MARIAN ȚARINĂ”***

**EDIȚIA A VI-A**  **12 – 13 MAI 2006**

# CLASA a X-a

**I.** Se consideră numărul complex $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ şi fie $u=z+z^2+z^4$ şi $v=z^3+z^5+z^6$.

a) Să se arate că $v=\overline{u}$ şi $\operatorname{Im}(u)>0$

b) Să se calculeze $u+v$ şi $uv$. Să se deducă valorile lui $v$ şi $u$.

*Gheorghe Lobonț*

**II.** Să se determine şirul de numere reale pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=2,\ a_k=k, a_k>1,\ \forall k\geq 2$ şi care satisface proprietatea:

$$\frac{a_1+1}{a_1-1}\cdot\frac{a_2+2}{a_2-2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+n}{a_n-n}=2\left(\sqrt{a_1-1}+\sqrt{a_2-1}+\ldots+\sqrt{a_n-1}\right)+1, \forall n\geq 1.$$

*Daniel Moldovan*

**III.** Se aruncă un zar de 5 ori, notându-se de fiecare dată numărul de puncte obținut. Astfel se obține o secvență ordonată de 5 numere.

a) Câte variante de secvențe sunt posibile ?

b) Precizați numărul de variante de a obține din cele 5 aruncări 3 numere distincte, două dintre ele având exact câte 2 apariții.

*Octavian Agratini*

**IV.** Fie $ABC$ un triunghi şi $P$ un punct în planul său.

1. Să se arate că $a\,PA^3+b\,PB^3+c\,PC^3\geq 3\,abc\,PG$, unde G este centrul de greutate al triunghiului iar a, b, c lungimile laturilor sale.

2. Să se demonstreze că $R^2\left(R^2-4r^2\right)\geq 4r^2\left[8R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]$ unde $R$ notează raza cercului circumscris şi $r$ raza cercului înscris în triunghiul $ABC$.

*Dorin Andrica, Titu Andreescu*

**<u>NOTĂ</u> :** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ**
**COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ**
**„*MARIAN ȚARINĂ*"**

**EDIȚIA A VI-A**

**12 – 13 MAI 2006**

# CLASA a XI-a

**I.** Fie $A \in M_n(\Re)$ şi $B = A - {}^T A$, unde ${}^T A$ este transpusa matricii $A$.

**a)** Arătați că pentru $n=4$ $\det B \geq 0$

**b)** Calculați *det B* pentru *n* impar.

*Monica Fodor*

**II.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{1+24a_n}\right) \end{cases}$$

Fie şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $b_n^2 = 1 + 24a_n$ cu $b_n \geq 0, n \in N^*$

**a)** Să se arate că $\forall n \in N^*$: $b_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{2}(b_n - 3)$ şi să se determine termenul general al şirului $(b_n)_{n\geq 1}$.

**b)** Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

*Gheorghe Lobonț*

**III.** Să se arate că dacă $A, B, C \in M_3(C)$ verifică relația $A^3 = B^3 = C^3 = O_3$ şi comută între ele două câte două, atunci $A \cdot B \cdot C = O_3$.

*Marius Rădulescu*

**IV.** Fie $f : \Re \to \Re$ o funcție derivabilă pentru care avem $f(0) = 0$ şi $f(x) \geq x$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

**a)** Arătați că $f'(0) \geq 1$.

**b)** Arătați că există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent către zero astfel încât $x_n > 0$ *si* $f'(x_n) \geq 1, \forall n \in N^*$.

**c)** Găsiți o funcție *f*, cu proprietățile de mai sus, pentru care există un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ descrescător şi convergent către zero, astfel încât $f'(a_n) < 1$, $\forall n \in N^*$.

*Dorel I. Duca*

**<u>NOTĂ</u> :** *Fiecare problemă se notează cu* **0 – 7** *puncte. Timp efectiv de lucru* **3** *ore.*

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI**
**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ**
**COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ**
***„MARIAN ȚARINĂ"***

**EDIȚIA A VI-A**  **12 – 13 MAI 2006**

# CLASA a XII-a

**I.** **1.** Determinați primitivele funcției $f(x)=\dfrac{x-1}{x^4-4x^3+10x^2-12x+10}, x\in\Re$

**2.** Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\left(2x^2+x+\frac{1}{2}\right)\cos 2x+\left(6x^2-7x+\frac{13}{2}\right)\sin 2x}{\sqrt{\left(x^2-x+1\right)^3}}dx$ .

*Gheorghe Lobonț*

**II.** Spunem că inelul A are proprietatea ***p*** dacă $\forall x\in A, \exists n_x\in N$, impar, cu proprietatea $x^{n_x}\in\{0,1\}$.

a) Să se arate că inelul cu proprietatea ***p*** este corp.
b) Să se arate că orice corp finit în care *1+1=0*, are proprietatea ***p***
c) Să se dea un exemplu de corp infinit, în care *1+1=0* şi care **nu** are proprietatea ***p***.

*Sorin Rădulescu, Ion Savu*

**III.** Fie $p\in N, p\geq 2$, $(G,\bullet)$ un grup cu $n\geq 2$ elemente şi funcția $f:G\to G$ definită prin $f(x)=x^p$, oricare ar fi $x\in G$. Să se arate că funcția *f* este bijectivă dacă şi numai dacă $(n,p)=1$.

*Manuela Prajea, Ion Savu*

**IV.** Fie $a,b,c\in(1,+\infty)$ şi $f:[a,+\infty)\to\Re$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[a,+\infty)$ astfel încât:

$f'(x)=\dfrac{1}{x^b+|f(x)|^c}$, oricare ar fi $x\in[a,+\infty)$.

Să se arate că funcția *f* are limită finită în $+\infty$.

*Dorel I. Duca*

**NOTĂ :** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*