MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A V-A  **20 – 22 MAI 2005**

CLASA a V-a

1. Determinați numerele naturale *a, b, c* ştiind că *a* este prim, $a+b+c=82$ şi $3b+c=144$.

Gheorghe Lobonț

2. Fie *x* produsul primelor *n* numere prime iar *y* produsul primelor *n* numere impare. Să se arate că numărul $A=2^{xy}+3^{xy}+4^{xy}-1$ nu este pătrat perfect.

Vasile Şerdean

3. Fie numărul $x=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$, *a,b,c* cifre în baza 10.

a) Aflați câtul şi restul împărțirii numărului *x* la 37.

b) Aflați toate numerele $\overline{abc}$ pentru care *x* = 2886.

Ioan Groza

4. Să se determine numerele naturale *x, y* diferite de zero pentru care $\frac{14x+2y}{3x+y}\in \mathbb{N}$ şi $\frac{2x+5y}{4x+y}\in \mathbb{N}$.

Vasile Şerdean

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A V-A  **20 – 22 MAI 2005**

CLASA a VI-a

1. Determinați numerele raționale *a, b, c* ştiind că îndeplinesc simultan condițiile:

1) $\dfrac{7a-2b}{8b+5a}=0{,}4$

2) numerele *b, c* sunt invers proporționale cu $\dfrac{1}{25}$ şi 0,(3)

3) media aritmetică a numerelor *a, b, c* este $(-2005)^0(-3)^3(-6)$.

Gheorghe Lobonț

2. Fie $M\subset \mathbb{Q}^*$ o mulțime dată. Dacă $\dfrac{2}{3}$ si $\dfrac{1}{4}$ aparțin mulțimii *M* şi $\dfrac{3x-y}{4x+y}\in M \quad \forall(x,y)\in M$ arătați că $\dfrac{5}{7}\in M$.

Vasile Şerdean

3. În triunghiul dreptunghic *ABC*, $m\left(\hat{B}\right)=2m\left(\hat{C}\right)$. Bisectoarea $\widehat{ABC}$ intersectează latura *(AC)* în *D*.

a) Demonstrați că punctul *D* aparține mediatoarei segmentului *(BC).*

b) Determinați măsura $\widehat{ABD}$ astfel încât triunghiul *ABC* să fie dreptunghic în *A*.

c) Dacă perimetrul triunghiului *ABD* este 25 cm şi *BC* este de 8 cm calculați perimetrul triunghiului *ABC.*

Ioan Groza

4. Se consideră triunghiul *ABC* cu $m\left(\hat{A}\right)=20^0$ şi $m\left(\hat{C}\right)=40^0$. Fie $T\in(AC)$ astfel ca $(BC)\equiv(AT)$. Calculați $m\left(\widehat{ATB}\right)$.

Vasile Şerdean

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore.*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A V-A **20 – 22 MAI 2005**

CLASA a VII-a

1. Calculați: **a)** $n=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\left|-\sqrt{2}\right|-\sqrt{-2\sqrt{5}+6}$.

b) $s=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{1680}+\sqrt{1681}}$.

c) media geometrică şi media armonică a numerelor n şi s.

Monica Fodor

2. a) Dacă $\dfrac{x}{y}=\sqrt{2004}$ să se calculeze $\dfrac{5y}{x\sqrt{501}+y}$.

b) Fie m, n numere naturale. Să se demonstreze că numărul $\sqrt{9^{m+n}+4^n+2\cdot 3^m\left(6^n+3^n\right)+2^{n+1}+1}$ este natural.

Gheorghe Lobonț

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu AB=2AD. Bisectoarea unghiului ADC intersectează latura (AB) în punctul E, iar bisectoarea unghiului DAB intersectează pe (DE) în punctul M. Fie punctul G pe segmentul (AM) astfel încât $GM=\dfrac{AG}{2}$. Dacă $EG\cap AD=\{N\}$ demonstrați că:

a) $AD=AE$ şi $AM\perp DE$

b) $MN=\dfrac{AB}{4}$

c) $\Delta AMD\sim\Delta CED$

d) $AM\parallel CE$.

Ioan Groza

4. Se consideră un triunghi ABC cu aria 90 cm^2 şi punctele M, E, D mijloacele segmentelor *(BC)*, *(AB)*, *(AC)*. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului, iar T este simetricul lui G față de M, R simetricul lui G față de D şi P este mijlocul lui *(AR)*, $BD=7,5cm$ şi $CE=18\ cm$, să se arate că:

I. a) $PD\parallel AM$ şi $PD=GM$.

b) Patrulaterul $BRCT$ este trapez, iar $AGCR$ paralelogram.

c) S[BGC] = S[BGA] = S[ACG], unde S[*] reprezintă aria triunghiului.

II. Să se calculeze : a) AM, PD şi perimetrul triunghiului ABC.

b) perimetrul trapezului $BRCT$.

Vasile Şerdean

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu 0 – 7 puncte. Timp efectiv de lucru 3 ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A V-A  **20 – 22 MAI 2005**

CLASA a VIII-a

1. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x+2y+[2x]-[y]=5 \\ 2x+y+5[2x]+4[y]=19 \end{cases}$$

unde $[a]$ notează partea întreagă a numărului real a.

Dorel I. Duca

2. Să se afle $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că *13n+4* şi *19n-2* sunt pătratele perfecte a două numere naturale impare consecutive.

Gheorghe Lobonț

3. Arătați că oricum am alege două numere naturale consecutive mai mari sau egale cu 2, între pătratele acestor numere putem găsi trei numere naturale distincte, astfel încât suma pătratelor a două dintre ele să se dividă cu al treilea număr.

Mariana Ursu

4. Diagonala BL a cubului ABCDEFML are lungimea $6\sqrt{3}cm$.

a) Să se calculeze măsura unghiului format de dreptele AC şi FC

b) Să se arate ca oricum am alege 217 puncte în interiorul cubului, cel puțin două dintre ele se află la o distanță mai mică sau egală cu $\sqrt{3}$.

c) Arătați că planele (ACF) şi (EMD) sunt paralele

d) Calculați d(A, BL) şi arătați că LB $\perp$ (ACF)

e) Calculați distanța dintre dreptele AD şi BL.

Vasile Şerdean

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A V-A  **20 – 22 MAI 2005**

CLASA a IX-a

1. Fie $A \subset \Re$ o mulțime cu proprietățile:

a) $0 \in A$

b) $x \in A \iff x^2 \in A, \quad \forall x \in \Re$

c) $(x-1)^2 \in A \iff x \in A, \quad \forall x \in \Re$

Să se arate că $2004 \cdot m + n \cdot \sqrt{2004} \in A, \forall m, n \in \mathrm{Z}$.

Daniel Arnold Moldovan

2. Fie $n \in \mathrm{N}, \quad n \geq 3$.

a) Să se demonstreze că dacă $x_1, x_2, ..., x_n \rangle 0$ atunci

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2+x_3+...+x_n}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1+x_3+...+x_n}}+...+\sqrt{\frac{x_n}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}}>2$$

b) Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \rangle 0$ şi $\sqrt{x_1 x_2}+\sqrt{x_2 x_3}+\sqrt{x_3 x_4}+...+\sqrt{x_{n-1} x_n}+\sqrt{x_n x_1}=1$ să se arate că

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+...+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Gheorghe Lobonț

3. Se consideră un pentagon convex *ABCDE* cu *S[ABC] = S[BCD] = =S[CDE]= S[DEA] = S[EAB]* = $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Să se calculeze *S[ABCDE],* unde *S[*]* reprezintă aria poligonului.

Vasile Şerdean

4. Fie $A_1, A_2, ..., A_n$,puncte situate pe un cerc de centru O. Definim punctele H_k, $k \in \{3,4,...,n\}$ astfel:

1. H_3 este ortocentrul triunghiului $A_1A_2A_3$

2. $H_k \in [H_{k-1}A_k]$ *si* $\frac{H_{k-1}H_k}{H_kA_k}=\frac{1}{k-3}$ pentru $k \geq 4$.

Să se demonstreze că vectorul $\overrightarrow{OH_n}$ nu depinde de numerotarea punctelor A_i, $i=\overline{1,n}$.

Daniel Văcărețu

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A V-A  **20 – 22 MAI 2005**

CLASA a X-a

1. Determinați toate numerele naturale *n,* pentru care numărul $q=1+C_n^1+C_n^2+C_n^3$ este o putere a lui 2.

Mariana Ursu

2. Fie *ABCD* un patrulater înscris într-un cerc de centru *O* şi fie *P* un punct oarecare pe acest cerc. Notăm H_A, H_B, H_C, H_D ortocentrele triunghiurilor *BCD, CDA, DAB* şi *ABC*.

a) Să se demonstreze că dreptele AH_A, BH_B, CH_C, DH_D sunt concurente într-un punct *H* şi $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

b) Să se demonstreze că expresia $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2-2PH^2$ este constantă.

Daniel Văcărețu

3. Să se afle $x, y, z \in \Re$ dacă

$$3^{2x}+3^{\frac{y}{3}}+3^{z-y}+3^{3-2x-z}=6$$

Gheorghe Lobonț

4. Fie numerele complexe nenule z_1, z_2, z_3 cu proprietatea

$$\frac{|z_2+z_3-z_1|^2}{|z_1|}+\frac{|z_3+z_1-z_2|^2}{|z_2|}+\frac{|z_1+z_2-z_3|^2}{|z_3|}=|z_1+z_2+z_3|.$$

Să se arate că $z_1=z_2=z_3$.

Daniel Arnold Moldovan

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A V-A  **20 – 22 MAI 2005**

CLASA a XI-a

1. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln^{\alpha}(n+1)-\ln^{\alpha} n\right],\quad \alpha\in\Re$.

Dorin Andrica

2. Fie $(x_n)_{n\ge1}$ un şir convergent de numere reale pozitive, cu proprietatea $x_1+\sqrt{x_2}+\sqrt[3]{x_3}\ldots+\sqrt[n]{x_n}\ \langle\ \frac{5}{6}n,\quad (\forall)n\ge1$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Mihai Piticari

3. Să se demonstreze că pentru orice matrice nesingulară $A\in M_n(\boldsymbol{C})$ există un $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ astfel încât $Tr\ A^k\neq0$.

Daniel Arnold Moldovan

4. Determinați limita şirului $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin

$$x_1=1,\ x_{n+1}=\left(n^3+x_n^{n-1}\right)^{1/n}, n\ge1.$$

Dorel I. Duca

<u>**NOTĂ**</u> **:** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A V-A  **20 – 22 MAI 2005**

CLASA a XII-a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu elementul neutru e şi $a \in G$, $a \neq e$, a element de ordinul n al grupului G. Arătați că oricare ar fi o funcție $f : G \to G$, funcția $h : G \to G$, $h(x) = f(x)\cdot f(ax)\cdot \ldots \cdot f\left(a^{n-1}x\right)$ nu este injectivă.

Mariana Ursu

2. Fie $f : [0,+\infty) \to [0,1)$ o funcție continuă şi crescătoare şi $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Arătați că:

a) $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{F(x)}{x}$ şi este finită.

b) $(\forall)a > 0,\ (\exists)M_a \in (0,1)$ astfel încât $F(x) < M_a \cdot x, (\forall)x \in [0,a]$

c) Dacă $F^n = F \circ F \circ \ldots \circ F$ (n factori), atunci pentru orice $x \geq 0$, şirul (a_n) cu $a_n = F(x) + F^2(x) + F^3(x) + \ldots + F^n(x)$ este convergent.

Mihai Piticari

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $k \in N^*$ cu proprietatea că $(\forall)x, y \in G,\ x \neq y$ şi $(xy)^k \cdot x^k = y^k \cdot (xy)^k$. atunci $x = e$.

a) Să se rezolve în $(G,\cdot)$ ecuația $z^k = e$

b) Să se arate că dacă $x^k y^k = y^k x^k, (\forall)x, y \in G,$ atunci funcția $f : G \to G$ dată de legea $f(x) = x^k$ este injectivă.

c) Să se arate că funcția *f* este morfism dacă şi numai dacă este morfism injectiv.

Daniel Arnold Moldovan

4. Fie $r > 1$ şi $s \in (0, r-1)$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x^s \int_0^1 \left(e^{-x^r \arcsin t}\right)dt.$

Dorel Duca

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*