MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A IV-A  **14 – 16 MAI 2004**

CLASA a V-a

I. Să se determine $\overline{abcd}$ cu proprietatea

$\overline{abcd} - \overline{abc} - \overline{ab} - a = 2004$

Gheorghe Lobonț

II Comparați numerele A, B unde

$$A = 2003^{2003} + 2004^{2004} \text{ şi}$$
$$B = 2003^{2004} + 2004^{2003}.$$

Vasile Şerdean

III. Să se afle numerele naturale n pentru care fiecare din numerele n^2+1, n^2+3, n^2+7, n^2+9, n^2+15 este număr prim.

* * *

IV. Fie M mulțimea numerelor naturale n pentru care fracția $\frac{n+3}{17n+104}$ se poate simplifica. Să se găsească suma primelor 100 de elemente ale mulțimii M.

Vasile Şerdean

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A IV-A  **14 – 16 MAI 2004**

CLASA a VI-a

I. Să se determine toate numerele naturale care nu pot fi scrise ca sumă de două numere compuse.

* * *

II. O mulțime ***A*** este formată din cinci elemente numere întregi. Determinați mulțimea ***A*** ştiind că dacă adunăm in toate modurile posibile câte trei elemente din mulțime obținem următoarele zece sume: 5, 6, 8, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 24.

Vasile Şerdean

III. În paralelogramul *ABCD*, care are $(AB)\equiv(AC)$, bisectoarea $[CR$ $(R\in AB)$, a unghiului $\angle ACB$ formează cu BC un unghi cu măsura de 18^{o}. Ştiind că înalțimea AM $(M\in BC)$ a paralelogramului este de 5 cm, calculați:

a) Măsurile unghiurilor triunghiului $\Delta\, ADC$,

b) Lungimea bisectoarei $[CR$.

Vasile Şerdean

IV. Se consideră 2004 puncte în plan. Să se arate că există o dreaptă cu proprietatea că în semiplanele determinate de ea se află câte 1002 puncte.

* * *

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

EDIȚIA A IV-A  **14 – 16 MAI 2004**

CLASA a VII-a

I. Să se arate că numărul $\underbrace{44...4}_{2004}-\underbrace{88...8}_{1002}$ este pătrat perfect.

* * *

II. Fie $0 \le x \le y \le z \le 1$ astfel încât xy+yz+zx=1. Să se demonstreze inegalitatea $x^2+y^2+z^2+xz \le 2$.

Marian Tetiva, Mircea Lascu

III. Determinați numerele naturale n pentru care $\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{n}{n+1}\right]=\left[\frac{5n}{n+1}\right]$, unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului a.

Mariana Ursu

IV. Fie [AB] diametrul unui cerc de centru O. Pe segmentul [OB] se consideră punctul fix P. Prin P se duce o coardă variabilă [MN].

a) Să se determine poziția coardei astfel încât aria patrulaterului AMBN este maximă.

b) Să se afle raportul ariilor patrulaterelor cu proprietatea de la punctul a) dacă $OP=\frac{1}{4}OB$, respectiv $OP=\frac{1}{2}OB$.

* * *

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A IV-A  **14 – 16 MAI 2004**

CLASA a VIII-a

I. Arătați că numarul $A=\sqrt{3n^2+3n+17}\in R-Q$, $(\forall)\, n\in N$.

Ioan Groza

II. Din şirul $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}, \cdots,$ $\frac{1}{(n-1)n}, \cdots$ să se determine grupul de termeni consecutivi a căror sumă este $\frac{1}{3}$.

* * *

III. Fie $a, b, c, d\ >0$ astfel încât $a+b+c+d\ =16$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(a+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{d}\right)^2+\left(d+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{289}{4}$$

Mircea Lascu,Marian Tetiva

IV. Fie cubul ABCDA'B'C'D' având lungimea muchiei *a*. Pe semidreptele [CD, [CB, [CC' se consideră punctele X, Y respectiv Z astfel încât CX= *a*+*x*, CY = *a*+*y*, CZ=*a*+*z,* unde $x,z,y\in(0,a)$. Planul determinat de punctele X, Y şi Z împarte cubul în două corpuri. Să se demonstreze că volumele celor două corpuri sunt egale dacă şi numai dacă are loc relația:

$$\left(\frac{x}{a+x}\right)^3+\left(\frac{y}{a+y}\right)^3+\left(\frac{z}{a+z}\right)^3+3\frac{a^3}{(a+x)(a+y)(a+z)}=1$$

Daniel Văcărețu

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A IV-A  **14 – 16 MAI 2004**

CLASA a IX-a

I. Se consideră numerele reale pozitive *a, b, c* astfel încât $a \geq \frac{3}{2}$, $ab \geq \frac{3}{8}$ şi $abc \geq \frac{3}{80}$. Să se arate că $a+b+c \geq \frac{37}{20}$.

Gheorghe Lobonț

II. Fie f : $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} m_1 x + n_1, & x \in [0.1) \\ m_2 x + n_2, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in R \setminus [0,2] \end{cases}$

Determinați $m_1 \in \boldsymbol{R}^*$, $m_2 \in \boldsymbol{R}^*$, $n_1 \in \boldsymbol{R}$, $n_2 \in \boldsymbol{R}$ încât să existe numerele reale a, b, c cu proprietatea

$$af(2x) + bf(2x-1) + cf(2x-2) = f(x), \quad \forall x \in R.$$

Octavian Agratini

III Să se determine cel mai mic număr natural n cu proprietatea că pentru orice *x* real are loc inegalitatea

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-n| \geq 2001.$$

Liviu Ignat, Mircea Lascu

IV Fie ABCD un patrulater înscris într-un cerc de centru O. Notăm H_A, H_B, H_C, respectiv H_D ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, respectiv ABC şi cu G_A, G_B, G_C, respectiv G_D centrele de greutate ale aceloraşi triunghiuri.

Fie I_A, I_B, I_C, respectiv I_D simetricele punctelor G_A, G_B, G_C, respectiv G_D față de H_A, H_B, H_C, H_D şi J_A, J_B, J_C, J_D simetricele punctelor H_A, H_B, H_C, respectiv H_D față de G_A, G_B, G_C, G_D. Să se demonstreze că dreptele AI_A, BI_B, CI_C, DI_D sunt concurente într-un punct X şi dreptele AJ_A, BJ_B, CJ_C, DJ_D sunt concurente într-un punct Y şi punctele O, X, Y sunt coliniare.

Daniel Văcărețu

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A IV-A  **14 – 16 MAI 2004**

CLASA a X-a

I. Fie $f: R \to C$ cu proprietatea că $(\forall) t_1, t_2 \in R, (\forall) c_1, c_2 \in C$ are loc inegalitatea

$$f(0)(|c_1|^2 + |c_2|^2) + f(t_1 - t_2) c_1 \overline{c_2} + f(t_2 - t_1) \overline{c_1} c_2 \geq 0$$

Demonstrați $\overline{f(t)} = f(-t)$ şi $|f(t)| \leq f(0), \quad (\forall) t \in R$

Octavian Agratini

II. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 25$ şi

$$x_{n+3} = \frac{n+1}{n}(2n^2 + 5n + 4)x_{n+2} + (n+2)^2(2n^2 + 5n + 4)x_{n+1} - \frac{(n+1)^5}{n}(n+2)^2 x_n \;, \quad (\forall) n \geq 1$$ are

toate elementele numere naturale pătrate perfecte.

Dorel Duca

III. Fie P un polinom de gradul 2004. Dacă $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pentru k = 0,1,...,2004, calculați $P(2005)$.

Dorin Andrica

IV. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc, P un punct pe cerc şi G centrul de greutate al patrulaterului.

Să se demonstreze că expresia $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 - 4PG^2$ este constantă.

Daniel Văcărețu

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ŢARINĂ*”

EDIŢIA A IV-A  **14 – 16 MAI 2004**

CLASA a XI-a

I. a) Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Demonstraţi: dacă $x \geq y \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, atunci: $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n+1]{y} \geq \sqrt[n]{y} + \sqrt[n+1]{x}$

b) Arătaţi că :

$$n\sqrt[n]{n} + \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n+1}} \geq 2n+1, \quad (\forall)\, n \geq 3.$$

Dorin Andrica

II. Fie $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ cu $n \geq 2$. Să se arate că $A\overline{A} = I_n$ dacă şi numai dacă există o matrice nesingulară S astfel încât $A = S\,\overline{S}^{-1}$ (dacă $A = (a_{ij})$ atunci $\overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)$).

* * *

III. Fie $x_0 \in (0,1]$ *si* $x_{n+1} = x_n - \arcsin(\sin^3 x_n)$, $n \geq 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, x_n$.

Titu Andreescu

IV. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale cu proprietatea că

$$y_n = x_n + \frac{9}{10}\, arctg\, x_{n-1}, \quad (\forall) n \geq 2.$$

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Dorel Duca

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A IV-A  **14 – 16 MAI 2004**

CLASA a XII-a

I. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{1/n} x^{x+1}dx.$$

Dorin Andrica

II. Să se arate că pentru orice funcție continuă $f:[-1,1]\to R$ există cel puțin un punct $c\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ astfel încât:

$$(\sin c) f(\cos c)+\cos c\, f(\sin c)=0.$$

Dorel Duca

III. Fie A un inel necomutativ astfel încât $x^3=x$, pentru orice x din A.

Să se arate că:

$$xy^2=y^2x,\ (\forall)x,y\in A.$$

* * *

IV. a) Fie $g:(0,\infty)\to R$ o funcție continuă astfel încât $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$. Demonstrați

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\int_0^x e^t g(t)dt=0.$$

b) Arătați că dacă $f:[0,\infty)\to R$ este o funcție de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă astfel încât există:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+2f'(x)+f''(x)\right)=l,$$

atunci există $\lim_{x\to\infty} f(x)$ şi are loc $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$.

Dorin Andrica