



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a IV-a

SUBIECTUL 1

Aflați diferența dintre numerele naturale a și b știind că ele verifică egalitățile:

$$[(4 + a : 3) : 12 + 5] \times 4 - 26 = 42$$

$$[(b + 7) : 25 - 8] \times 8 + 5 = 37$$

Gheorghe Lobonț

SUBIECTUL 2

Suma a două numere naturale este 225. Dacă pe primul număr îl înmulțim cu 2, iar pe al doilea număr îl împărțim la 2, obținem numere egale. Care sunt numerele?

Eugenia Miron

SUBIECTUL 3

În urmă cu 7 ani, suma vârstelor fraților Mariei era de 9 ani. Acum suma vârstelor fraților ei este de 37 ani. Câți frați are Maria?

Ioan Groza

SUBIECTUL 4

La concursul de matematică „Marian Țarină”, ediția a 10-a, au participat 272 elevi, dintre care 258 au rezolvat prima problemă, 250 au rezolvat a doua problema, 163 au rezolvat a treia problemă și 149 au rezolvat a patra problemă. Arătați că cel puțin patru elevi au rezolvat toate problemele.

Vasile Șerdean



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Determinați toate numerele naturale \overline{abcd} cu proprietatea că $\overline{ab} - \overline{ba} = 36$ și $\overline{dc} + \overline{cd} = 33$.

Monica Fodor

SUBIECTUL 2

Fie numărul:

$$A = 91992999399994 \dots 999 \dots 92006$$

- Calculați suma cifrelor numărului A .
- Care este cifra de pe locul 108?
- Determinați câte cifre de 9 conține numărul A .

Ioan Groza, Cristian Pop

SUBIECTUL 3

Suma a trei numere naturale este 349. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 4 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 7 și restul 4. Să se afle numerele.

Gheorghe Lobonț, Lucia Iepure

SUBIECTUL 4

Se consideră 10 numere naturale nenule (nu neapărat diferite) și calculăm toate sumele posibile formate din câte 9 dintre aceste numere și obținem: 83, 84, 85, ..., 90, 91 (sumele care se repetă le scriem o singură dată). Aflați cele 10 numere.

Vasile Șerdean



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Fie x, y, z trei numere întregi pozitive cu proprietatea că primele două sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar ultimele două sunt invers proporționale cu $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{5}$. Studiați dacă produsul lor este cub perfect, când suma numerelor este 100.

Monica Fodor, Ancuța Nechita

SUBIECTUL 2

a) Fie

$$x = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2011}, \quad y = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2011}; \quad z = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2011}.$$

Scrieți în ordine crescătoare numerele: $1 + 9z$; $(2y + 1)^2$; $(x + 1)^3$.

b) Să se arate că fracția $\frac{5c + 8}{3c + 5}$ este ireductibilă, $(\forall) c \in \mathbb{N}$.

Vasile Șerdean, Monica Fodor

SUBIECTUL 3

Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine), astfel încât $(AB) \equiv (CB) \equiv (CD)$. Fie E un punct exterior dreptei d , astfel încât $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle EDA$. În triunghiul EDA se construiesc medianele (AF) ($F \in (ED)$) și (DP) ($P \in (AE)$). Să se arate că:

a) E aparține mediatoarei segmentului (BC) ;

b) $(AF) \equiv (DP)$

c) $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle DFC$

d) $\sphericalangle PBE \equiv \sphericalangle FCE$.

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și înălțimea AD , $D \in (BC)$. Fie (BE) bisectoarea unghiului B . Dacă $AD \cap BE = \{T\}$, $TE = 6$ cm și $DT = 3$ cm, calculați măsura unghiului C .

Vasile Șerdean, Camelia Magdaș



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

- a) Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătați că

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc$$

- b) Utilizând eventual punctul a), demonstrați că: $(a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1)(a_3^2 + 1) \dots (a_n^2 + 1) \geq 2^n$ dacă $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

SUBIECTUL 2

Să se arate că
$$\frac{1}{671} + \frac{1}{672} + \dots + \frac{1}{2011} = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{2009 \cdot 2010 \cdot 2011}$$

Vasile Șerdean

SUBIECTUL 3

În triunghiul ABC se consideră punctul D pe segmentul (BC) . Fie E și F simetricile punctului D față de dreptele AB respectiv AC .

- Demonstrați că $m(\sphericalangle EAF)$ este constantă oricare ar fi poziția punctului D pe latura (BC) .
- Determinați poziția punctului D pe segmentul (BC) astfel încât perimetrul triunghiului AEF să fie minim.
- Arătați că $EF < 2AD$.
- Care este poziția punctului D pe (BC) astfel încât $AD \perp EF$?

Ioan Groza, Lucia Iepure

SUBIECTUL 4

Se consideră punctul M în interiorul triunghiului echilateral ABC și P, L, K proiecțiile sale pe (AB) , (BC) , respectiv (AC) . Calculați aria triunghiului ABC știind că $AP = 8$, $BL = 12$ și $CK = 7$.

Vasile Șerdean, Gheorghe Lobonț



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$, $x \in [0, 3a]$ și $y \in [0, 2b]$. Demonstrați că are loc egalitatea:

$$(x - y)^2 + \left(\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2} \right)^2 \leq 13(a^2 + b^2).$$

Ștefania Mustea, Monica Fodor

SUBIECTUL 2

- a) Știind că $x^3 - 3xy^2 = 10$ și $y^3 - 3x^2y = 198$, calculați $x^2 + y^2$.
b) Să se determine cifra n din numărul $x = 1, n12$ care are proprietatea că

$$2d(x) + x = 2,488,$$

unde $d(x)$ notează distanța de la x la cel apropiat număr întreg față de x .

Vasile Șerdean, Dorel I. Duca

SUBIECTUL 3

Cubul $ABCD A' B' C' D'$ are muchia de lungime a . Calculați:

- a) Distanța de la punctul B la dreapta $A'D$.
b) Cosinusul unghiului format de planele $(O'AC)$ și $(O'AB)$ unde $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$.
c) Distanța de la punctul A la planul $(O'BC)$.
d) Aria secțiunii determinată în cub de planul $(O'BC)$.

Monica Fodor, Ioan Groza

SUBIECTUL 4

O piramidă triunghiulară $VABC$ are aria bazei ABC egală cu 16. Fețele laterale VAB , VAC , VBC au respectiv ariile 10, 10, 12 și fac același unghi cu planul bazei. Să se calculeze volumul piramidei $VABC$.

Vasile Șerdean, Cristian Pop



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a IX-a

SUBIECTUL 1

Fie $n \geq 1$ un număr natural.

- Arătați că restul împărțirii lui $4^{4 \cdot 5^{n-1}}$ la 5^n este 1.
- Arătați că dacă numărul natural $m \geq 1$ are proprietatea că restul împărțirii lui m^5 la 5^n este 1, atunci restul împărțirii lui m la 5^{n-1} este 1.

Dorel I. Duca

SUBIECTUL 2

Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor \hat{A} , \hat{B} respectiv \hat{C} se intersectează două câte două în punctele A' , B' respectiv C' (A și A' sunt separate de dreapta BC , B și B' sunt separate de dreapta CA , C și C' sunt separate de dreapta AB). Notăm cu R_A , R_B respectiv R_C razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $A'BC$, $B'CA$ respectiv $C'AB$. Să se demonstreze

$$R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 = 2R(2R - r),$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC iar r este raza cercului înscris în triunghiul ABC .

Daniel Văcărețu

SUBIECTUL 3

Fie a, b, c, x, y, z numere reale strict pozitive. Să se arate că

$$(a+x)(b+y)(c+z) + 4\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz}\right) \geq 20.$$

Dumitru Săvulescu, Lucian Tuțescu, G.M. nr. 6/2010

SUBIECTUL 4

Fie $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$. Funcția satisface condițiile $f(-2) \leq -2$, $f(-1) \geq 0$, $f(1) < -1$.

Răspundeți la următoarele întrebări:

- Punctul de extrem al funcției f este de maxim sau de minim? Justificați.
- Dacă x_0 este punct de extrem al funcției, atunci $x_0 < 0$ sau $x_0 > 0$? Justificați.
- Graficul funcției f poate trece prin punctul $P(2, -4)$? Justificați.

Dorel I. Duca



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a X-a

SUBIECTUL 1

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$2011^{2[x]} + 2011^x = 2012 \cdot 2011^{[x]},$$

unde prin $[x]$ se înțelege partea întreagă a numărului real x .

Gheorghe Lobonț

SUBIECTUL 2

Fie z_1, z_2 numere complexe ce satisfac relațiile

$$|z_1^5 + z_2^5| \leq 2, \quad |z_1^3 + z_2^3| \leq 2 \quad \text{și} \quad |z_1 z_2| \leq 1.$$

Să se arate că $|z_1 + z_2| \leq 2$.

Aurel Doboșan, G.M. nr. 4/2010

SUBIECTUL 3

Fie $\alpha, \beta \geq 0$ și $a, b \geq 1$ numere reale. Să se arate că

$$a^{\alpha \sin x + \beta \cos x} \cdot b^{\alpha \cos x + \beta \sin x} \leq e^{(\alpha + \beta) \sqrt{\ln^2 a + \ln^2 b}},$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Ilie Diaconu, nr. 4/2010

SUBIECTUL 4

Se dă $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = (-1)^{[\sqrt{n}]}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x . Studiați periodicitatea funcției f .

Monica Fodor



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a XI-a

SUBIECTUL 1

Să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin

$$x_n = \frac{\cos^3 1}{n+1} + \frac{\cos^3 2}{n+2} + \dots + \frac{\cos^3 n}{2n}, \quad n \geq 1.$$

Liviu Tivadar

SUBIECTUL 2

Fie funcția polinomială $Q(x) = (a_1(x-1)+1)(a_2(x-1)+1)\dots(a_n(x-1)+1)$, $x \in \mathbb{R}$,

unde $a_i \in (0, 1)$, $1 \leq i \leq n$.

Determinați numerele a_1, a_2, \dots, a_n astfel încât expresia

$$\sum_{k=1}^n k^2 b_k - \left(\sum_{k=1}^n k b_k \right)^2$$

să aibă valoarea maximă, unde b_k este coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului Q .

Octavian Agratini

SUBIECTUL 3

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Lobonț

SUBIECTUL 4

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \left(\cos x - \ln(1+x) + x + \frac{x^3}{3} \right)^\pi, \text{ oricare ar fi } x \in D, \text{ unde } D \subseteq \mathbb{R} \text{ este mulțimea maximă de}$$

definiție a funcției f . Determinați cel mai mare număr natural n cu proprietatea că există un număr real $a \neq 0$, o vecinătate V a lui 0 și o funcție $b : V \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = 1 + ax^n + x^n b(x), \quad x \in V, \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} b(x) = 0.$$

Dorel I. Duca



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a XI-a, 6–7 MAI 2011

CLASA a XII-a

1. Să se arate că există un număr real a și un șir (b_n) care satisfac următoarele două proprietăți

$$\begin{aligned} a) & \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{a}{n} + b_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*, \\ b) & \lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = 0. \end{aligned}$$

Dorel I. Duca

2. Să se determine numerele naturale p pentru care ecuația

$$x^3 + y^3 = (p+3)! + 4$$

are soluții în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Marian Cicoaneș, G.M. 10/2010

3. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm

$$H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se demonstreze că H_n este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ și că

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} H_n.$$

Marian Andronache, Ion Savu

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = x [x] |\sin \pi x|, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} și să se determine o primitivă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f pe \mathbb{R} . (S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x .)

Eugenia Duca, Dorel I. Duca