MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

Ediția a X-a, 14–15 MAI 2010

100
2010
Anul Matematicii în Şcoala Românească

CLASA A IV-A

I. Suma a două numere naturale este *75*. Dacă adunăm de patru ori primul număr cu de trei ori al doilea număr obținem *240*. Aflați numărul cel mai mare.

Eugenia Miron

II. Diferența a două numere naturale este *687*. Dacă împărțim numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul *6* şi restul *12*. Aflați cele două numere.

Eugenia Miron

III. La concursul interjudețean de matematică şi informatică „Marian Țarină" participă *240* elevi repartizați în mod egal în *12* săli. Aflați cel mai mic număr de băieți care ar trebui să participe la concurs, pentru ca indiferent cum se face repartizarea în săli, în fiecare sală să fie cel puțin un băiat.

Vasile Şerdean

IV. Într-un parc s-au plantat lalele, garoafe şi panseluțe. Ştiind că *256* nu sunt lalele, *274* nu sunt garoafe, iar *192* nu sunt panseluțe, aflați câte lalele, câte garoafe şi câte panseluțe s-au plantat.

Eugenia Miron, Nicolae Alexandrescu

NOTĂ: Fiecare problemă/subiect se apreciază cu 10 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.
Timp de lucru efectiv: 2 ore.

CLASA A V-A

I. În câte zerouri se termină numărul $n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2010$?

Ştefania Mustea

II. Se consideră mulțimile:

$A = \{x \mid x = 2 \cdot 5^n, n \in N\}$ şi
$B = \{y \mid y = 3 \cdot 2^n - 1, n \in N\}$

a) Determinați primele trei elemente ale mulțimilor A şi B.

b) Determinați $A \cap B$; Justificați răspunsul.

Ioan Groza, Mirela Rațiu

III. Se consideră şirul de numere $1, 13, 61, 253, 1021, ...$ Să se arate că dacă x este numărul de pe locul 2007, atunci $x + 3$ este:

a) pătrat perfect;

b) cub perfect;

c) cubul unui pătrat perfect;

d) pătratul unui cub perfect.

Vasile Şerdean, Cristian Pop
Supliment G.M. nr. 4/ 2010

IV. Verificați dacă există un număr de trei cifre, care în baza 7 are forma $\overline{abc}$, iar în baza 9 are forma $\overline{bca}$.

Mariana Ursu

NOTĂ: Fiecare problemă/subiect se apreciază cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.
Timp de lucru efectiv: 2 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a X-a, 14–15 MAI 2010

100
2010
Anul Matematicii în Școala Românească

CLASA A VI-A

I. Se consideră numerele:

$a = 2^n(2^n + 1) - 2$ și $b = 2^n(2^n - 1) - 2$, $n \in N$.

a) Arătați că produsul celor două numere este divizibil cu 3.

b) Pot fi numerele simultan divizibile cu 3? Justificați.

Mariana Ursu

II. Calculați suma:

$S = 1 \cdot 2000 + 2 \cdot 1999 + 3 \cdot 1998 + \ldots + 1998 \cdot 3 + 1999 \cdot 2 + 2000 \cdot 1$

Vasile Șerdean, Lucia Iepure

III. Se consideră dreapta d, punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{2010}$ astfel încât $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{2009}A_{2010} = 1$ și B un punct ce nu aparține dreptei d. Fie $M_1, M_2, \ldots, M_{2010}$ mijloacele segmentelor $BA_1, BA_2, \ldots, BA_{2010}$.

a) Câte segmente obținem, unind în toate modurile posibile, punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{2010}, M_1, M_{2010}$.

b) Calculați suma $M_1M_2 + M_3M_6 + M_7M_{12} + \ldots + M_{1893}M_{1980}$.

Ancuța Nechita

IV. Triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ are $m(\sphericalangle A) = 20^0$. Pe (AC) se consideră punctul D astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = 10^0$. Calculați $\frac{BC}{AD}$.

Vasile Șerdean, Camelia Magdaș

NOTĂ: Fiecare problemă/subiect se apreciază cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.
Timp de lucru efectiv: 2 ore.

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a X-a, 14–15 MAI 2010

100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească

CLASA A VII-A

I. a) Calculați $S = 10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1$.

b) Fie $p = \overline{\underbrace{111\ldots1}_{2010\ cifre}}$ şi $q = \overline{\underbrace{444\ldots4}_{1005\ cifre}}$. Arătați că $p + q + 1$ este pătrat perfect.

Mariana Ursu

II. a) Calculați $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{1009}}$.

b) Arătați că $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2011}{2^{1006}} < 3$.

Vasile Şerdean, Gheorghe Lobonț

III. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12\,cm$ şi $AC = 18\,cm$. Fie $[AD$ bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$. Să se arate că $AD < 14{,}4\,cm$.

Vasile Şerdean

IV. Se consideră trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi $AC \perp BD$. Fie E mijlocul diagonalei $[AC]$. Paralela prin E la BD intersectează pe $[AB]$ în M. Demonstrați că:

a) $\Delta\, ABC$ este isoscel;

b) $ME = \frac{BD}{2}$;

c) $CM = \frac{AB + CD}{2}$.

Ioan Groza

NOTĂ: Fiecare problemă/subiect se apreciază cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.
Timp de lucru efectiv: 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

Ediția a X-a, 14–15 MAI 2010

100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească

CLASA A VIII-A

I. a) Arătați că dacă $x \in [1, 2]$ şi $y \in [2, 3]$, atunci $\left|x^3 - y(y-x)\right| \le 10$.

b) Arătați că $\left(\frac{13}{6}\right)^9 + \left(\frac{13}{7}\right)^9 > 1024$.

Mariana Ursu, Monica Fodor

II. Determinați numerele reale x, y, z ştiind că z este maxim, iar $x + y + z = 14$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 108$.

Vasile Şerdean, Cristian Pop

III. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie *a*.

a) Determinați distanța de la punctul B' la dreapta AD'.
b) Calculați măsura unghiului dintre dreptele $A'D$ şi BD'.
c) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului $A'BD$ demonstrați că punctele A, G, C' sunt coliniare.
d) Dacă *M, N, P* sunt puncte situate pe muchiile (BB'), (CC') respectiv (DD'), determinați poziția lor pe muchiile cubului astfel încât suma $AM + MN + NP + PA'$ să fie minimă.

Ioan Groza

IV. Se consideră un pătrat *ABCD* cu latura 2*a* şi un plan α perpendicular pe planul pătratului, ce conține latura *AB*. Fie triunghiul echilateral *AEB* inclus în planul α şi *M* un punct pe latura *AB*, astfel încât $MB = x$. Notăm *N* proiecția lui *E* pe *MC*, *F* mijlocul lui *AB*, *O* mijlocul lui *CE* şi *H* mijlocul lui *DC*. Se cere:
a) Exprimați lungimea segmentului *MO* în funcție de *a* şi *x*;
b) Arătați că *OC* = *ON* = *OF* = *OB* = *OH*;
c) Determinați cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare a lungimii segmentului *OM* şi precizați *x* pentru care se obțin valorile respective.

Mariana Ursu, Aura Buju

NOTĂ: Fiecare problemă/subiect se apreciază cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.
Timp de lucru efectiv: 3 ore.

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a X-a, 14– 15 MAI 2010

CLASA A IX-A

1. Calculaţi

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{2k + 3.\sqrt{k}}{k} \right\rfloor, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Dorel I. Duca

2. Să se determine toate tripletele de numere reale (x, y, z) care satisfac relatia

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = xy + yz + zx + |x - 2y + z|.$$

Titu Andreescu

3. Fie ABC un triunghi oarecare şi punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle A_1AB) = m(\sphericalangle B_1BC) = m(\sphericalangle C_1CA) = \alpha$. Notăm $A^* = BB_1 \cap CC_1$, $B^* = CC_1 \cap AA_1$, $C^* = AA_1 \cap BB_1$.Să se demonstreze că

$$\frac{r_A \cdot r_B \cdot r_C}{16R^2 \cdot p} = \sin^3 \alpha \cdot \sin^3 \frac{A-\alpha}{2} \cdot \sin \frac{C-\alpha}{2},$$

unde r_A, r_B, r_C sunt razele cercurilor înscrise în triunghiurile A^*BC, AB^*C, ABC^* iar R şi p sunt raza cercului circumscris, respectiv semiperimetrul triunghiului ABC

Daniel Văcăreţu

4. Demonstraţi că pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este adevărată inegalitatea

$$(3 - \sin^2 x) \sin^6 x \leq \cos^8 x + tg^8 x.$$

Precizaţi dacă există valori ale lui x pentru care se realizează egalitatea.

Octavian Agratini

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a X-a, 14– 15 MAI 2010

CLASA a-X-a

1. Să se arate că pentru orice n natural, $n \geq 2$, este adevărată inegalitatea

$$\log_n(n+3) - \log_{n+1}(n+4) > 0.$$

Mariana Ursu

2. Fie numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 cu

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Să se arate că

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} |\alpha z_2 + (1-\alpha) z_3 - z_1| = \frac{1}{2} |z_3 - z_1| \, |z_2 - z_1| \, .$$

Dorin Andrica, GMB 1/2010

3. Fie $k, m \in \mathbb{N}^*$ şi $p \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că are loc identitatea

$$k^p C_m^k = \sum_{i=0}^{p-1} a_p^{(i)} A_m^{p-i} C_{m-p+i}^{k-p+i} \, ,$$

unde

$$a_{p+1}^{(i)} = (p-i+1) a_p^{(i-1)} + a_p^{(i)}, \quad a_p^{(i)} > 0.$$

Petru Braica, Ovidiu Pop

4. a) Să se arate că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $0 < x \leq y$ avem

$$x + y \leq \alpha x + \frac{y}{\alpha},$$

oricare ar fi $\alpha \in (0, 1]$.

b) Să se arate că are loc inegalitatea

$$\frac{ad}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{d} + \frac{cd}{a} \geq a + b + c + d,$$

oricare ar fi a, b, c, d numere reale cu proprietatea $0 < a \leq b \leq c \leq d$.

Gheorghe Loborţ

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a X-a, 14– 15 MAI 2010

CLASA a XI-a

1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit astfel încât

$$2a_n \leq a_{n+1} + a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

şi fie $b_n = a_{n+1} - a_n$.

a) Să se demonstreze că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

b) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Gheorghe Lobonţ

2. Determinaţi

$$a = \inf\left\{[x] + \left[\frac{2}{x}\right] : \ x > 0\right\},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Dorel I. Duca

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ două matrice inversabile cu

$$AB^{-1} + A^{-1}B = I_{2n}.$$

Să se demonstreze că

$$\det(A-B)^2 \cdot \det\left((A^{-1})^2 + (B^{-1})^2\right) = 1.$$

Traian Tămâian, GMB 5/2009

4. Stabiliţi dacă există A şi $B \subset \mathbb{R}$ două mulţimi infinite şi o infinitate de perechi de funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ambele discontinue pe A, astfel încât $f \circ g$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $g \circ f$ este discontinuă pe B

Tudor Adrian Micu

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a X-a, 14– 15 MAI 2010

CLASA A XII-A

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$F(x)=\int_{x^2-1}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că funcţia F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi calculaţi derivata F' a funcţiei F.

b) Determinaţi funcţia F atunci când

$$f(x)=\sin 2\pi x,\ \text{oricare ar fi } x\in\mathbb{R}.$$

c) Determinaţi funcţia F atunci când

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x\le 1\\ 1+\ln x, & \text{dacă } x>1\end{cases}.$$

Dorel I. Duca

2. Fie $f:(-4,\infty)\to(0,\infty)$ derivabilă de două ori pe domeniul de definiţie, astfel încât verifică condiţiile

$$i)\ 2f''(x)=3f^2(x),\ x>-4,\quad ii)\ f(-2)=1,\quad iii)\ f'(-2)=-1.$$

Determinaţi $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-1}^{\lambda} f(x)dx.$

Octavian Agratini

3. Fie (G,·) un grup cu $2n+1$ elemente cu proprietatea că există o funcţie $f:G\to G$ care verifică relaţia

$$f(xf(xy))=yf(x^2),\quad \forall\ x,y\in G.$$

Să se arate că G este grup abelian.

Mihai Opincariu, GMB 1/2010

4. Fie A un inel cu proprietatea $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx+xyz+1$, $\forall\ x,y,z\in A^*$ Să se arate că A este un corp cu două elemente.

.

Andrei Văleanu, GMB 1/2009