MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A IX-A  **15 – 16 MAI 2009**

CLASA a IV-a

I Scrieți toate numerele naturale de două cifre care împărțite la un număr de o cifră dau restul 7.

Eugenia Miron

II Triplul sumei a trei numere naturale impare consecutive este 783. Aflați numerele.

Eugenia Miron

III Diferența a două numere naturale este 630. Dacă împărțim numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 5 şi restul 10. Aflați cele două numere.

Eugenia Miron

IV Aflați suma numerelor cuprinse între 1 şi 1000 care au cifra unităților şi a zecilor 7.

Vasile Şerdean

NOTĂ : *Timp efectiv de lucru 90 minute.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A IX-A  **15 – 16 MAI 2009**

CLASA a V-a

I Să se afle restul împărțirii numărului $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2008 + 2010$ la 2009.

Mariana Ursu

II La concursul “Marian Țarină” participă 180 de elevi repartizați în mod egal în 12 săli. Să se afle:

a) Cel mai mic număr de băieți care ar trebui să participe ştiind că, indiferent de repartizare, în fiecare sală trebuie să fie cel puțin un băiat.
b) Cel mai mare număr de băieți care ar putea să participe ştiind că, indiferent cum se face repartizarea, două săli să fie numai cu fete.

Ioan Groza, Ştefania Mustea

III Unui număr natural cu 2009 de cifre îi schimbăm în mod arbitrar ordinea cifrelor. Este posibil ca diferența dintre numărul inițial şi cel final sa fie 2009? Justificați.

Vasile Şerdean

IV Să se arate că fracția

$$\frac{1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2008^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2009}$$

este subunitară.

Gheorghe Lobonț

<u>**NOTĂ**</u> **:** Fiecare problemă se notează cu 0 – 10 puncte. Timp efectiv de lucru 2 ore.

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A IX-A  **15 – 16 MAI 2009**

CLASA a VI-a

I. Numerele $x+y$, $y+z$, $z+x$ sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, respectiv 5.

a) Să se determine a, astfel încât $3x^2-2y^2=az^2$

b) Aflați x, y, z ştiind că cel mai mare dintre ele este 24.

Ancuța Nechita, Ştefania Mustea

II. Fie numerele $2-x, 4-x, 6-x, \ldots, 2008-x$, cu $x \in Z$.

a) Arătați că pentru $x=1$ suma numerelor este pătrat perfect

b) Calculați produsul numerelor pentru $x=100$.

c) Determinați cea mai mică valoare a lui x astfel încât toate numerele să fie negative.

Ioan Groza

III. Un greier se află pe axa numerelor întregi în punctul M de coordonată 2011, adică $M(2011)$. El face o săritură de 4 unități în sensul pozitiv şi apoi una de 7 unități în sensul negativ şi continuă. Aflați după a câta săritură va fi în mijlocul segmentului determinat de punctele A (1852) şi B (554).

Vasile Şerdean

IV. Să se arate că numărul triunghiurilor cu lungimile laturilor numere naturale şi perimetru 2009 este egal cu numărul triunghiurilor cu lungimile laturilor numere naturale şi perimetru 2012.

Vasile Şerdean

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

EDIȚIA A IX-A  **15 – 16 MAI 2009**

CLASA a VII-a

I Să se arate că $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2009^2}<\frac{4\cdot 2009}{2\cdot 2009+1}$.

Mariana Ursu

II Fie numărul $A=3^m\cdot 7^n$, $m,n\in N$ şi x,y,z numărul divizorilor naturali ai numerelor $A, 3A,$ respectiv $7A$. Dacă mulțimile $\{x+z, y\}$ şi $\{2,1\}$sunt direct proporționale, să se determine:

a) relația între numerele naturale *m, n*

b) determinați numerele naturale n pentru care 1<*A*<12000.

Monica Fodor

III Se consideră un patrulater convex *ABDC* şi punctele *E, F, T, R* astfel încât *E* este mijlocul (*AB*), *F* este mijlocul lui (*BC*), *T* este mijlocul lui *(DC)* şi *R* este mijlocul lui (*AD*). Ştiind că $\{O\}=ET\cap RF$ şi $S[AROE]=12\,m^2$ şi $S[BEOF]=16\,m^2$, iar $S[ROTD]=20\,m^2$, să se calculeze aria patrulaterului *ABCD.*

Vasile Şerdean

IV Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$ şi $m(\prec A)=36^0$. Bisectoarea unghiului C intersectează latura $[AB]$în punctul D.

a) arătați că $AD=BC$

b) demonstrați că $AD^2=AB\cdot BD$

c) determinați un punct E pe latura $[AC]$ astfel încât suma $DE+EB$ să fie minimă.

Ioan Groza

<u>**NOTĂ**</u>**:** Fiecare problemă se notează cu 0 – 7 puncte. Timp efectiv de lucru 3 ore.

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A IX-A  **15 – 16 MAI 2009**

CLASA a VIII-a

I Determinați numărul maxim de funcții definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B, dacă

$$A=\left\{x\in Z \middle| \sqrt{x^2+10x+32}\in N\right\} \quad si \quad B=\left\{x\in Z \middle| \sqrt{x^2+6x+12}\in N\right\}$$

Precizați mulțimea punctelor graficului.

Monica Fodor

II Se consideră un poligon convex cu lungimile laturilor $a_1, a_2, ..., a_n$, care satisfac simultan relațiile:

$$\begin{cases} a_1+a_2+...+a_n=3 \\ \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}=3 \end{cases}$$

Arătați că oricum am alege 101 puncte în interiorul poligonului, există cel puțin 2 puncte situate unul față de celălalt la distanța de cel mult $\frac{1}{10}$ din latura poligonului.

Mariana Ursu, Ancuța Nechita

III Se consideră mulțimea $A=\{101,102,...,119,120\}$. Pot fi aşezate elementele mulțimii A în vârfurile şi în mijloacele muchiilor unui cub astfel încât elementele situate în mijloacele muchiilor să fie media aritmetică a elementelor situate la capetele acelei muchii? (Justificați)

Vasile Şerdean

IV Fie cubul *ABCDA'B'C'D'* de latura *a*, iar *M, N* şi *P* mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AD]$ şi respectiv $[A'C]$.

a) să se demonstreze că planul (*MNP*) este perpendicular pe planul (*A'AC*)
b) Să se determine măsura unghiului dintre dreapta *A'C* şi planul (*MNP*)
c) Calculați distanța dintre dreptele *MN* şi *AD*'

Monica Fodor, Ioan Groza

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A IX-A  **15 – 16 MAI 2009**

CLASA a IX-a

I Punctele $(0,0)$, $(a,\ 11)$, $(b,\ 37)$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral. Determinați $a \cdot b$.

***

II Fie $a, b \in (0, \infty)$. Determinați

$$\min\{k > 0 \mid a \leq k \cdot \min\{a, b\}\}.$$

Alexandru Blaga

III Pe laturile triunghiului oarecare ABC considerăm punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle A_1AB) = m(\sphericalangle B_1BC) = m(\sphericalangle C_1CA) = \alpha$. Notăm $\{A^*\} = BB_1 \cap CC_1$, $\{B^*\} = AA_1 \cap CC_1$, $\{C^*\} = BB_1 \cap AA_1$. Să se demonstreze că:

$\frac{r_A}{a} = \frac{r_B}{b} = \frac{r_c}{c}$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral, unde r_A, r_B, r_C sunt razele cercurilor înscrise în triunghiurile A^*BC, AB^*C şi ABC^*, iar *a, b, c* sunt lungimile segmentelor (*BC*), (*CA*) şi (*AB*).

Daniel Văcărețu

IV Fie $q \in (0,1)$, $a \in \mathrm{R}, b \in \mathrm{R}$. Pentru orice număr natural n notăm produsul $(a+b)(a+qb)\ldots(a+q^{n-1}b)$ cu $(a+b)_q^n$. Convenim că $(a+b)_q^0 = 1$.

Fie $p(n,j) = \frac{(1-q^{n-j+1})_q^j}{(1-q)_q^j} q^{\frac{j(j-1)}{2}}$, $0 \leq j \leq n$.

a) Arătați că raportul $\frac{p(n+1,j) - p(n,j)}{p(n,j-1)}$, $1 \leq j \leq n$, nu depinde de j.

b) Demonstrați că $(a+b)_q^n = \sum_{j=0}^{n} p(n,j) a^{n-j} b^j$, $n \geq 1$.

***

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A IX-A  **15 – 16 MAI 2009**

CLASA a X-a

I. Să se determine cel mai mic număr natural a astfel încât $\sqrt[n]{C_{2n}^{n}} < a$ pentru orice număr natural $n \geq 1$.

***

II. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

***

III. Să se rezolve ecuația $10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x$

***

IV. Fie un şir de numere reale $(x_n)_{n \in N}$, definit astfel: $x_0 = 2$, $2x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 20}$ $(\forall) n \in \mathrm{N}$. Să se arate că $2^n \cdot x_n \in \mathrm{N}$, $(\forall) n \in \mathrm{N}$.

Gheorghe Lobonț

<u>NOTĂ</u>: *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A IX-A  **15 – 16 MAI 2009**

CLASA a XI-a

I. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$, pentru orice $n\geq 1$, unde $(F_n)_{n\geq 0}$ este şirul lui Fibonacci definit prin $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

b) Demonstrați că $F_{m+n+1}=F_{n+1}\cdot F_{m+1}+F_n\cdot F_m$ oricare ar fi $m\geq 0, n\geq 0$.

***

II. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & a & a\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n\in \mathbb{N}$.

Gheorghe Lobonț

III. Fie $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale pozitive, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ o bijecție şi $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ şi $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ şirurile cu

$$u_n=x_1+x_2+\ldots+x_n,\ n\in\mathbb{N}$$

$$v_n=\sqrt{x_1x_{\sigma(1)}}+\sqrt{x_2x_{\sigma(2)}}+\ldots+\sqrt{x_nx_{\sigma(n)}}\ ,\ n\in\mathbb{N}.$$

Să se arate că dacă şirul (u_n) este convergent, atunci şirul (v_n) este convergent.

Dorel I. Duca

IV. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Dacă funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)-2f(x)$, are limită în orice punct, să se demonstreze că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Dorin Andrica, Mihai Piticari

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

EDIȚIA A IX-A

15 – 16 MAI 2009

CLASA a XII-a

I. Determinați toate funcțiile $f:[0,1]\to \mathbb{R}$, derivabile cu derivata continuă, pentru care

$$\int_0^1\left(f^2(x)+x^2 f'(x)\right)dx=f(1)-\frac{1}{3}.$$

Dorel I. Duca

II. Fie p un număr prim şi $\alpha\in S_{p+1}$ o permutare de ordinul p.
Să se determine mulțimea:

$$C_\alpha=\left\{\sigma\in S_{p+1} \mid \sigma\alpha=\alpha\sigma\right\}.$$

Dorin Andrica, Mihai Piticari

III. Pentru fiecare număr natural n, notăm

$$x_n=\int_0^1 x^n\frac{\arctan x}{1+x}\,dx.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_0-x_1+\ldots+(-1)^n x_n\right).$$

Dorel I. Duca

IV. Fie p un număr prim şi $n\geq p$. Să se determine numărul polinoamelor de grad n din $Z_p[X]$ ale căror funcții polinomiale sunt injective.

Dorin Andrica, Mihai Piticari

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*