MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A VIII-A  **16 – 17 MAI 2008**

CLASA a IV-a

I. Calculați:

$$94\cdot 7+\left[\left(59\cdot 3-177\right):5+85\right]:5-498\,.$$

Eugenia Miron

II. Aflați numerele naturale *a, b, c, d, e* şi *f* ştiind că:

$$a=b+11=c+22=d+33=e+44=f+55=166-a\,.$$

* * *

III. a) Calculați suma primelor 11 numere naturale impare.
b) Suma a 10 numere naturale distincte şi diferite de zero este 98. Arătați că produsul lor este un număr par.

Mariana Ursu

IV. Aflați cu câte zerouri se termină numărul obținut prin înmulțirea tuturor numerelor naturale de la 1 la 31.

Vasile Şerdean

NOTĂ : *Timp efectiv de lucru 90 minute.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI,CERCETĂRII ȘI TINERETULUI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VIII-A  **16 – 17 MAI 2008**

CLASA a V-a

I. Calculați:

$$2^2 \cdot 4^{44} : \left(2^{43}\right)^2 - 27^{27} : 9^{40} - 3^{96} : 27^{32}.$$

Mariana Ursu

II. Dublul unui număr este egal cu triplul altui număr, iar diferența lor este 16. Aflați numerele.

Valer Pop

III. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 2007, 2008\}$.

a) Scrieți mulțimea A folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale.
b) Aflați suma elementelor mulțimii A.
c) Arătați că suma elementelor impare ale mulțimii A este pătrat perfect.
d) Determinați numărul tuturor submulțimilor mulțimii A.
e) Să se arate că oricum am alege 1005 elemente din A, produsul lor este număr par.

Vasile Şerdean, Grigore Tarța

IV. Arătați că $\overline{x,(y)}+\overline{y,(x)}=\overline{x,y(x)}+\overline{y,x(y)}=\overline{x,(yx)}+\overline{y,(xy)}$, numerele fiind scrise în baza 10.

Ioan Groza

__**NOTĂ**__ **:** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

EDIȚIA A VIII-A  **16 – 17 MAI 2008**

CLASA a VI-a

I. Să se determine toate perechile de numere naturale (a,b) pentru care $d+m=b+25$, unde d reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a şi b, iar m reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a şi b.

Gheorghe Lobonț

II. Să se compare numerele A şi B, unde:

$$A=\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\ldots+\frac{1}{2008} \text{ iar}$$

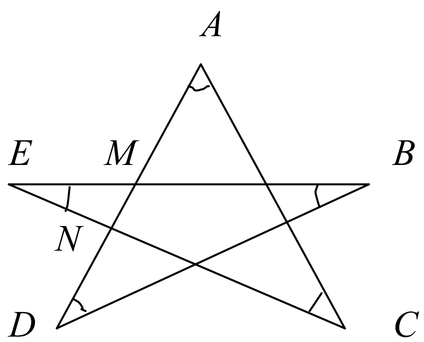
$$B=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{2007\cdot 2008}.$$

Vasile Şerdean, Cristian Pop

III. Numerele naturale a, b, c sunt măsurile unghiurilor unui triunghi şi sunt direct proporționale cu numerele naturale n, p, q, având raportul de proporționalitate 36. Demonstrați că triunghiul este isoscel.

Ioan Groza, Mirela Rațiu

IV. Calculați suma măsurilor unghiurilor $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D, \sphericalangle E$ din figura alăturată.



G.M. nr.11/2007

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VIII-A  **16 – 17 MAI 2008**

CLASA a VII-a

I. Dacă $a=\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}-\sqrt{8}$, calculați a^{2008}.

Gherasim Feurdean, Aura Buju

II. Fie *x, y* două numere reale subunitare de forma:

$x=\overline{0,abcd}$ şi $y=\overline{0,bacd}$.

Determinați numerele reale *x* ştiind că $3x-2y=1{,}5018$.

Dorel Duca

III. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului *ABC* în care $m(\sphericalangle C)=2m(\sphericalangle A)$ iar *AC=2 BC.*

Marcel Chiriță,G.M. nr.2/2008

IV. Se consideră un triunghi *ABC* şi mediana *AM.* Dacă *R, T* şi *P* sunt respectiv mijloacele segmentelor *(AM), (BR), (CT),* iar aria triunghiului *RTP* este $4\ cm^2$, calculați aria triunghiului *ABC*.

Vasile Şerdean

<u>**NOTĂ**</u> **:** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ŢARINĂ*"

EDIŢIA A VIII-A  **16 – 17 MAI 2008**

CLASA a VIII-a

I. Determinaţi toate numerele naturale *n*, cu proprietatea:

$$(n-5) \mid (n^3-5).$$

Mariana Ursu

II. Se consideră funcţia $f:\Re \to \Re$,

$$f(x)=\max\left(x^2+ax+b,\, x^2+bx+a\right), \quad a \neq b.$$

Să se determine *a* şi *b*, ştiind că graficul funcţiei *f* conţine punctele $A(-2,6)$ şi $B(3,8)$.

Vasile Şerdean, Gheorghe Lobonţ

III. Fie *ABCDA'B'C'D'* un cub de muchie *a*.

a) Calculaţi distanţa dintre planele (*A'BD*) şi *(CB'D')*.

b) Dacă $M \in (AB)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât $AM = BN$, demonstraţi că planele $(B'AN)$ şi (MDD') sunt perpendiculare.

c) Calculaţi sinusul unghiului diedru al planelor $(A'BD)$ şi $(AB'D')$.

Ioan Groza, Radu Trif

IV. Se consideră o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei $6\sqrt{2}$ şi măsura unghiului dintre două feţe laterale alăturate de 75^0.
Calculaţi aria laterală şi volumul piramidei.

Vasile Şerdean, Simona Pop

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A VIII-A  **16 – 17 MAI 2008**

CLASA a IX-a

I. Să se arate că pentru orice $x, y, z > 0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{x^2}{x^{12}+y^6+z^6}+\frac{y^2}{x^6+y^{12}+z^6}+\frac{z^2}{x^6+y^6+z^{12}} \le \frac{1}{x^2\cdot y^2\cdot z^2}.$$

Gheorghe Lobonț

II. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic oarecare. Arătați că există un punct D pe latura (AB), astfel încât

$$CD^2 = AC\cdot BC.$$

Dorel Duca

III. Dacă x şi y sunt numere reale astfel încât $xy\geq 0$, atunci demonstrați că

$$|xy-1| \le \max\{|x^2-1|, |y^2-1|\}.$$

Octavian Agratini

IV. Fie ABC un triunghi oarecare şi fie punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ şi $C' \in (AB)$. Fie A^*, B^*şi C^* punctele de intersecție ale perechilor de drepte BB' şi CC', CC' şi AA', respectiv AA' şi BB'. Notăm $R_{A_1}, R_{B_1}, R_{C_1}$ şi cu $R_{A_2}, R_{B_2}, R_{C_2}$ razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AB^*C', BC^*A', CA^*B' respectiv $AB'C^*$, $BC'A^*$, $CA'B^*$.

Să se demonstreze că:

$$\frac{R_{A_{11}}}{R_{A_2}}\cdot\frac{R_{B_1}}{R_{B_2}}\cdot\frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = 1$$ dacă şi numai dacă dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente (altfel spus, punctele A^*, B^*, C^* coincid).

Daniel Văcărețu

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VIII-A  **16 – 17 MAI 2008**

CLASA a X-a

I. Să se rezolve în $\Re$ ecuația:

$$\frac{\left(2^x+3^x+5^x\right)^{10}}{10^{2x+8}}=3375^{x-1}.$$

Gheorghe Lobonț

II. Considerăm numerele

$a_k=1+q+\ldots+q^{k-1}$, $b_k=a_1a_2\ldots a_k$, $k\in N$ unde $q>0$ este fixat.

Pentru orice n natural fie $s_{n,k}=\dfrac{b_n}{b_k\,b_{n-k}}$, $0\le k\le n$. Determinați numerele x_k şi y_k astfel încât să aibă loc următoarele relații:

$$s_{n+1,k}=s_{n,k-1}+x_k s_{n,k}$$
$$s_{n+1,k}=y_k q^{n+1}s_{n,k-1}+s_{n,k},\quad 1\le k\le n.$$

Octavian Agratini

III. Fie p_1,p_2,p_3 numere prime diferite două câte două şi $n\in N^*$. Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,\ldots,2n\}\to\{p_1,p_2,p_3\}$ ştiind că $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2n)$ este pătrat perfect.

Dorin Andrica , Mihai Piticari

IV. Să se determine toate perechile (z,n) astfel încât

$$z+z^2+\ldots+z^n=n|z|,$$

unde z este număr complex având modulul număr natural şi n este număr natural nenul.

Dorin Andrica , Mihai Piticari

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A VIII-A  **16 – 17 MAI 2008**

CLASA a XI-a

I. Fie $A, B, C \in \mathrm{M}_n(C)$ care comută două câte două şi verifică

$$A^3 + B^3 + C^3 = A + B + C = O_n$$

Să se arate că $ABC = O_n$

* * *

II. Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcție mărginită şi $p>0$ un număr real fixat. Dacă pentru orice $\alpha>0$ avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(f(x)-\alpha f^{p}(\alpha x)\right)=0,$$

să se demonstreze ca $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0.$

Dorin Andrica , Mihai Piticari

III. Se consideră funcția $f_n:\Re\to\Re$, $f_n(x)=x^n+2008x-2001$, $n\in N^*$. Notăm cu (a_n) şirul rădăcinilor pozitive ale ecuației $f_n(x)=0$. Studiați monotonia şirului (a_n).

Mariana Ursu

IV. Fie $f:(0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcție mărginită. Dacă

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{1}{2}\sqrt{f\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)=0 \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)-2f^2(2x)\right)=0$$

atunci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$

Dorin Andrica , Mihai Piticari

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru 3 ore.*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*"

EDIȚIA A VIII-A

16 – 17 MAI 2008

CLASA a XII-a

I. Se consideră $(K,+,\cdot)$ un corp cu 81 de elemente. Notăm cu 0 şi 1 elementele neutre ale operațiilor " + ", respectiv " · ". Demonstrați:

a) 1+1+1=0;

b) $(x+y)^3 = x^3 + y^3$, $(\forall)\, x, y \in K$;

c) grupul $(K,+)$ este izomorf cu grupul $(Z_3 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_3,+)$.

* * *

II. a) Dacă $m,n \in N - \{0,1\}$, $(m,n)=1$, atunci inelul Z_{mn} este izomorf cu inelul $Z_m x Z_n$.

b) Dacă $n_1, n_2, ..., n_k \in N - \{0,1\}$, $k \geq 2$, $(n_i, n_j)=1$ pentru $i \neq j$, atunci inelul $Z_{n_1 n_2 ... n_k}$ este izomorf cu inelul $Z_{n_1} x Z_{n_2} x ... x Z_{n_k}$

c) Fie $n = p_1^{n_1} p_2^{n_{21}} ... p_k^{n_k}$ descompunerea în factori primi distincți a numărului natural *n*. Dacă mulțimea $A = \{x \in Z_n \mid x^2 = x\}$, atunci numărul elementelor lui *A* este o putere a lui 2.

* * *

III. Să se arate că funcția $f : \Re \to \Re$ definită prin $f(x) = \cos(4 arctg\, x)$ admite primitive pe $\Re$. Determinați o primitivă $F : \Re \to \Re$ a funcției *f* pe $\Re$.

Eugenia Duca, Dorel Duca

IV. Dacă $f : [0,1] \to \Re$ este o funcție continuă, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) d\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

unde $d(x)$ notează distanța de la numărul real *x* la cel mai apropiat întreg.

Eugenia Duca, Dorel Duca

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*