MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”

EDIȚIA A VII-A

25 – 26 MAI 2007

CLASA a IV-a

I. Calculați

$$903:7+7x\left[1000-25x\left(50-7x10:5\right)\right]$$

Miron Eugenia

II. Aflați numerele naturale a şi b ştiind că:

$$a\cdot\left(b+7\right)=27$$

G.M. 9/2006 – Gh. Achim

III. Câtul a două numere naturale este 5, iar diferența lor este 600. Aflați numerele.

Dorina Vitaliş

IV. Suma dintre un număr, triplul predecesorului şi dublul succesorului său este 299. Aflați numerele.

Vasile Şerdean

<u>NOTĂ</u> : *Timp efectiv de lucru 90 minute.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VII-A

25 – 26 MAI 2007

CLASA a V-a

I. Să se determine numărul natural n ştiind că:

$$n^2 + n^3 = 5202$$

G.M. 9/2006 - Vasile Rusu

II. Comparați numerele:

$$a = 2^3 \cdot 2^6 \cdot 2^9 \cdot \ldots \cdot 2^{6021} \quad \text{şi} \quad b = 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^6 \cdot \ldots \cdot 3^{4014}$$

Ioan Groza, Simona Pop

III. Suma a douăsprezece numere naturale nenule şi distincte este 106. Demonstrați că produsul lor se divide cu 12.

Vasile Şerdean, Cristian Pop

IV. Determinați numerele naturale de forma $\overline{xyz}$ pentru care are loc relația

$$x^y \cdot z^x - 9 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 17$$

Grigore Tarța, Gherasim Feurdean

<u>**NOTĂ**</u> **:** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VII-A  **25 – 26 MAI 2007**

CLASA a VI-a

I. Determinați numărul $\overline{xy}$ ştiind că are loc egalitatea:

$$\overline{xy0}+\overline{xy1}+\overline{xy2}=\overline{xy}+2004$$

G.M. 10/2006 – Robert Csaki

II. Determinați toate numerele de trei cifre scrise în sistemul zecimal de forma $\overline{asb}$, unde $s=a+b$, care adunate cu răsturnatele lor dau pătrate perfecte.

Notă: Dacă $\overline{abc}$ este un număr natural de trei cifre, atunci prin rasturnatul său se înțelege $\overline{cba}$.

Gheorghe Lobonț

III. Să se rezolve ecuația:

$$x+2x+2^2x+2^3x+...+2^{2006}x=2007\cdot 2^{2007}-2007$$

Gherasim Feurdean, Grigore Tarța

IV. În triunghiul ABC, mediana *(BM)*, $M\in(AC)$, formează cu (BC) un unghi de măsură $2\cdot x$, iar cu (AB) un unghi de măsură $7\cdot x$. Să se calculeze $m(\angle A)$ al ΔABC ştiind că (AB) formează cu prelungirea laturii (CB) un unghi cu măsura $3\cdot x$ $\left(x\neq 0^0\right)$.

Vasile Şerdean

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 10 *puncte. Timp efectiv de lucru* 2 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VII-A  **25 – 26 MAI 2007**

CLASA a VII-a

I. Să se arate că $(\forall)\, n \in N$, fracția

$$F = \frac{8n^3 - 4n^2 + 1}{8n^3 + 4n^2 + 1}$$

este ireductibilă.

Mariana Ursu

II. Rezolvați în ZxZ ecuația:

$$2x - y + xy = 2006$$

G.M. 11/2006 – Carmen Şotan, Eugen Spaciu

III. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle B) = 2 \cdot m(\angle C)$. Construim bisectoarea $[BE$ a unghiului ABC, $E \in (AC)$. Paralela prin C la dreapta BE intersectează dreapta AB în punctul D. Demonstrați că:

a) $AB^2 = AC \cdot AE$;
b) $\Delta ABC \sim \Delta ACD$
c) $AE^2 + EB^2 + 2AE \cdot EB = AB^2 + AB \cdot BD$
d) bisectoarele unghiurilor BEC şi DBC sunt concurente în punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului BCD.

Ioan Groza, Cristian Pop

IV. Unghiurile A şi B de la baza mare $[AB]$ a trapezului $ABCD$ sunt complementare. Ştiind că $AB = 20\,cm$, $CD = 14\,cm$ şi M este mijlocul lui $[AB]$, iar K este mijlocul lui $[CD]$, să se calculeze MK.

Vasile Şerdean, Simona Pop

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„*MARIAN ȚARINĂ*”

EDIȚIA A VII-A  **25 – 26 MAI 2007**

CLASA a VIII-a

I. Rezolvați ecuația:

$$\left[\frac{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+5}{4}\right]=1$$

unde $x \in Z$ iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Mariana Ursu

II. Fie $M=\{1, 2, 3, ..., 4012, 4013\}$ şi o funcție $f: M \to M$ cu $f(x)=ax+b$, $(a \neq 0)$. Să se arate că $f(2007)=2007$.

Vasile Şerdean

III. Fie triunghiul dreptunghic ABC în care $m(\angle A)=90^0$, $m(\angle B)=30^0$, $AC=b$. În punctul B se duce perpendiculara pe planul (ABC), pe care se ia punctul M astfel încât $BM=b$. Se cere:

a) demonstrați că triunghiul MBA este dreptunghic
b) demonstrați că AC este perpendiculară pe planul (MAB)
c) calculați aria triunghiului MAC.

G.M.6/2006 - Luca Tuță

IV. Fie cubul $ABCDA`B`C`D`$ de muchie a, iar M şi N mijloacele segmentelor $[AB]$ şi respectiv $[B`C]$.

a) calculați distanța de la punctul A la dreapta $B`C$
b) demonstrați că dreapta MN este paralelă cu planul $(DAB`)$
c) arătați că dreapta MN este perpendiculară pe planul $(CB`D`)$
d) calculați distanța dintre dreptele $A`D$ şi AC.

Ioan Groza, Radu Trif

<u>NOTĂ</u> : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VII-A  **25 – 26 MAI 2007**

CLASA a IX-a

I. Se dau numerele reale $a_1, a_2, ..., a_{2007}$ astfel încât $a_1 = 0$ şi $|a_k| = |a_{k-1}+1|$, pentru $k = \overline{2,2007}$. Să se demonstreze că :

$$a_1 + a_2 + ... + a_{2006} + a_{2007} \geq -\frac{2007}{2}.$$

Gheorghe Lobonț

II. Fie $f:\Re \to \Re,\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ 2-x, & x \in (1,2] \\ 0, & x \in (-\infty,0] \cup (2,+\infty) \end{cases}$

Stabiliți dacă există numerele reale a, b, c astfel încât

$$a\,f(2x) + b\,f(2x-1) + c\,f(2x-2) = f(x),\quad (\forall)\, x \in \Re.$$

Octavian Agratini

III. Fie PA o coardă în cercul $\mathcal{C}$ şi M mijlocul lui $[PA]$. Cercul de centru P şi raza PM intersectează cercul $\mathcal{C}$ în B şi C.
Să se demonstreze că în triunghiul ABC are loc relația:

$$\sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Daniel Văcărețu

IV. Fie triunghiul echilateral ABC, M este un punct pe latura (BC) şi punctele $N \in AC,\ \ P \in AB$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ şi $\overrightarrow{CP}$ să fie coliniari. Arătați că suma

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2} + \frac{1}{\left|\overrightarrow{BN}\right|^2} + \frac{1}{\left|\overrightarrow{CP}\right|^2}$$ este constată.

G.M. 2 /2005 – Mihai Dicu

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VII-A  **25 – 26 MAI 2007**

CLASA a X-a

I. Să se determine numerele naturale $x \geq 2$, $y \geq 1$ ştiind că numerele C_{x-1}^{y-1}, C_{x-1}^{y}, C_x^y sunt în progresie aritmetică, iar numerele A_x^y, A_x^{y+1}, A_{x+1}^{y+1} sunt în progresie geometrică.

Marian Țarină, G.M. nr.11/1979

II. Să se determine cel mai mic număr real a cu proprietatea că pentru orice $x, y, z \in \Re_+$ cu $xyz = 1$, are loc inegalitatea:

$$a\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right) \geq \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + 4\,(x+y+z).$$

Tudor Adrian Micu

III. Fie n, p, j numere naturale astfel încât $p+j \geq n \geq 2j > 0$.
Se formează secvențe de forma $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, unde $x_k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $(\forall)\ k = \overline{1,n}$.
Stabiliți câte secvențe de acest fel pot fi formate cu proprietatea ca j valori să apară exact de câte 2 ori şi toate celelalte $n - 2j$ poziții să conțină valori distincte.

Octavian Agratini

IV. Dacă $x, y, z \in \boldsymbol{C}$ şi $x + y + z \neq \frac{2007}{663}$, să se arate că:

$$-\,2007(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 1989xyz = 663\,(x^3 + y^3 + z^3)$$

dacă şi numai dacă x, y, z sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Dorin Andrica, Gheorghe Lobonț

<u>**NOTĂ**</u> **:** *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VII-A  **25 – 26 MAI 2007**

CLASA a XI-a

I. Fie $f:\Re \to \Re$ derivabilă de două ori pe $\Re$ astfel încât $f(0)=f'(0)=0$. Să se arate că există o funcție derivabilă $g:\Re \to \Re$ astfel încât

$$g(x^5)=f(x^3),\quad x\in\Re .$$

Dorel I.Duca

II. Fie $A,B\in M_n(C)$ şi şirul de matrice $(X_k)_{k\geq 0}$, unde $X_k\in M_n(C)$, $X_0=I_n$ şi $X_{k+1}=A\cdot X_k+B,\quad k\geq 0.$ Dacă există un număr natural *m* astfel încât $A^m=O_n$ şi *B* este inversabilă să se arate că X_m este inversabilă.

Dorin Andrica

III. Fie $A\in M_2(\Re)$ o matrice pătratică ce are proprietățile:

$$\det(A+I_2)=7 \text{ şi } \det(A-I_2)=5$$

Să se calculeze

a) $\det(A-3I_2)$ şi $\det(A+3I_2)$;

b) $\det(A^3-3A^2+2A)$.

Gheorghe Lobonț

IV. Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive şi

$$y_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$$
$$u_n=(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)$$
$$v_n=\frac{x_1}{u_1}+\frac{x_2}{u_2}+\ldots+\frac{x_n}{u_n}$$

a) Arătați că

$$v_n=1-\frac{1}{u_n}, \text{ oricare ar fi } n\in N^*$$

b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=1$ dacă şi numai dacă şirul (y_n) este divergent.

Dorel I. Duca

__NOTĂ :__ *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru 3 ore.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ"

EDIȚIA A VII-A  **25 – 26 MAI 2007**

CLASA a XII-a

I. Să se determine $n \in N^*$, astfel încât ecuația

$$x^n + 3x^3 + 2x + 1 = 0$$

să admită o soluție în Z_5.

G.M. nr.3/2006, A.Eckstein, V.Tudoran

II. Fie $f_1 : \Re \to \Re$ o funcție continuă cu proprietatea că dreapta $x = 1$ este axă de simetrie a graficului. Pentru orice $n \geq 2$ considerăm

$$f_n : \Re \to \Re, \quad f_n(x) = \int_{x-1}^{x} f_{n-1}(t)\,dt .$$

Arătați că pentru orice n graficul lui f_n admite axă de simetrie şi precizați ecuația acesteia.

Octavian Agratini

III. Să se determine valorile întregi ale lui n pentru care există şi este finită limita

$$\lim_{x \to \infty} \int_1^{x^3} \frac{t^n \cdot e^{-t}}{\sqrt[3]{t}}\,dt .$$

Dorel I.Duca

IV. Pentru $\alpha \in C \setminus \Re$, cu $|\alpha| = 1$, notăm $Z[\alpha] = \{x + y\alpha \mid x, y \in Z\}$. Să se demonstreze că dintre mulțimile $Z[\alpha]$ de mai sus, singurele care sunt subinele ale corpului C sunt $Z[i]$ şi $Z\left[\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right]$.

G.M. nr.5/2006, Marcel Țena

NOTĂ : *Fiecare problemă se notează cu* 0 – 7 *puncte. Timp efectiv de lucru* 3 *ore.*