MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a IV-a

SUBIECTUL 1

Într-o zi de Duminică, la Salina Turda, a venit un grup de vizitatori, băieți și de două ori mai multe fete. Au intrat în Salină 324 băieți și 400 fete. Numărându-i pe cei de afară s-a constatat că sunt de trei ori mai multe fete decât băieți.

Câți elevi au fost la Salina Turda în acel grup?

SUBIECTUL 2

Într-o școală sunt 1096 elevi. Arătați că cel puțin patru elevi își serbează ziua de naștere în aceeași zi a anului. (Se va considera anul de 365 de zile).

SUBIECTUL 3

Aflați numărul natural n pentru care suma primelor n numere naturale diferite de 0 este cu 400 mai mică decât suma următoarelor n numere naturale.

SUBIECTUL 4

Doi elevi din clasa a IV-a, Ion si Mihai, colegi de bancă, desenează figuri geometrice. Ion desenează doua pătrate, apoi 4 pătrate, apoi 6 pătrate și așa mai departe, de fiecare dată un număr par. Mihai desenează un triunghi, apoi trei triunghiuri, apoi cinci triunghiuri și așa mai departe, de fiecare dată un număr impar. Să se arate că, indiferent după cât timp se vor opri din desenat, numărul pătratelor nu poate fi egal cu numărul triunghiurilor.

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Fie mulțimile

$A = \{x \mid x = 5 \cdot (n+1) + 6^{n^2+2n} + 1001^{n+3} + 5^{n+4}, n \in \mathbb{N}\}$

$B = \{y \mid 4000000 \leq y \leq 4004001, y \in \mathbb{N}\}$

$C = \{z \mid z = n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

Să se calculeze: $A \cap C$ și $B \cap C$.

SUBIECTUL 2

Determinați ultima cifră a sumei tuturor numerelor naturale de trei cifre care au un număr impar de divizori.

SUBIECTUL 3

Să se rezolve în $\mathbb{N}^* x \mathbb{N}^*$ ecuația

$$2^x + 1 = 3^y.$$

SUBIECTUL 4

Arătați că, oricum am alege nouă numere naturale, găsim trei numere dintre ele a căror sumă sau diferență a oricăror doua să dea multiplu a lui 7.

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Fie x, y, z numere raționale pozitive astfel încât

$$\frac{2x}{3y+4z}=\frac{3y}{2x+4z}=\frac{4z}{2x+3y}$$

a) Să se calculeze $(x+3y+2z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{2z}\right)$ și $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

b) Arătați că numărul $n=\frac{2x}{3y}+\frac{3y}{4z}+\frac{2z}{x}$ e natural.

SUBIECTUL 2

Determinați toate perechile (x,y) de numere întregi astfel încât

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

SUBIECTUL 3

Pe latura BC a triunghiului obtuzunghic isoscel ABC cu [AB]≡[AC] se consideră punctul M astfel încât [BM] ≡[AC] iar pe latura AB se consideră punctul N astfel încât [BN] ≡[MC]. Dacă m(∢AMN)=40°, să se afle măsurile unghiurilor ΔABC.

SUBIECTUL 4

Pentru latura [AC] a triunghiului ascuțitunghic ABC se consideră punctele P,Q astfel [AQ] ≡[CP]. Dacă P aparține mediatoarei segmentului [BC] și Q aparține mediatoarei segmentului [AB] , să se demonstreze că

a) ΔBPQ este isoscel;
b) ΔABC este isoscel.

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Să se demonstreze inegalitatea $n^n \leq (n!)^2$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, n număr natural, $n \geq 1$.

SUBIECTUL 2

Un număr natural n se numește fidel dacă există numerele naturale $a < b < c$ astfel încât $a|$b, $b|$c și $a + b + c = n$.

a) Demonstrați că există un număr finit de numere naturale care nu sunt fidele.
b) Aflați suma tuturor numerelor naturale, strict mai mici ca 2017, care nu sunt fidele.

SUBIECTUL 3

Să se demonstreze că in orice triunghi dreptunghic are loc relația

$$\sqrt{R} + \sqrt{r} + \sqrt{m_a} \leq \frac{P+3}{2},$$

unde p este semiperimetrul, m_a este mediana corespunzătoare ipotenuzei de lungime a, iar R și r sunt razele cercului circumscris respectiv înscris triunghiului dreptunghic.

SUBIECTUL 4

Se construiesc pe rând: pătratul ABCD, Δ BDE echilateral, astfel încât A se găsește în interiorul ΔBDE și pătratul BEFG astfel încât D se găsește în interiorul pătratului BEFG. Notăm cu $\{M\} = GE \cap DB$ și cu $\{N\} = GB \cap AC$.

a) Arătați că DN || FM.
b) Știind că AB=$\sqrt{6}$, arătați că $MN \leq \sqrt{2}$.

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația

$$x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z - 5\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

SUBIECTUL 2

Să se demonstreze inegalitatea

$$(n!)^2 \leq n^n \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n-1},$$

unde n!=1$\cdot$ 2 $\cdot$ ... $\cdot\, n$, n fiind număr natural n$\geq$ 1.

SUBIECTUL 3

Fie un cub $ABCDVB'C'D'$ cu $VA \perp (ABC)$. Dacă $A_1 = pr_{[VB]}A$, $A_2 = pr_{[VC]}A$ și $A_3 = pr_{[VD]}A$ demonstrați că $CV \perp (A_1A_2A_3)$ iar punctele A_1, A_2, A_3 și A sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil.

SUBIECTUL 4

Fie ABCD un tetraedru de volum V și o dreaptă d ce trece prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC. Dacă $AB \cap d = \{P\}, AC \cap d = \{Q\}$ să se arate că

$$\frac{b}{vol[DAPC]} + \frac{c}{vol[DAQB]} = \frac{a+b+c}{V},$$

unde a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a IX-a

SUBIECTUL 1

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $abc = 1$. Arătați că

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)(a+b)(b+c)(c+a).$$

SUBIECTUL 2

Fie $(a_n)_{n \ge 1}$ șirul definit prin

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se afle termenul general al șirului $(a_n)_{n \ge 1}$.

b) Să se calculeze suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k^3 + k^2)a_{2k+1}}$$

și să se arate că $S_n < 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL 3

Să se afle restul împărțirii numărului $\left[\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^{2018}\right]$ la 64, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL 4

Fie ABC un triunghi oarecare ascuțitunghic, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, $\{A'\} = AO \cap BC$, $\{B'\} = BO \cap CA$, $\{C'\} = CO \cap AB$.

Să se demonstreze că segmentele de lungimi $(\sin 2B + \sin 2C) \cdot OA'$, $(\sin 2C + \sin 2A) \cdot OB'$ respectiv $(\sin 2A + \sin 2B) \cdot OC'$ pot fi laturile unui triunghi.

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ

COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a X-a

SUBIECTUL 1

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, și $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, +\infty)$ cu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

Să se arate că

$$\sum \frac{a_1^2 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{a_2 + a_3 + \dots + a_n} \geq n - 1 .$$

SUBIECTUL 2

Există numere prime distincte p, q, r astfel încât $\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$ sunt termeni ai unei progresii aritmetice?

SUBIECTUL 3

Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc inegalitatea

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\sqrt{C_n^k} + \sqrt{C_n^{k+1}}\right)^4}{\sqrt{C_n^k C_n^{k+1}}} \geq 16\,(2^n - 1).$$

SUBIECTUL 4

Fie ecuația $z^4 - 2\alpha z^3 - 2\alpha z + 1 = 0$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

a) Să se arate că ecuația nu are rădăcini reale.

b) Să se determine α astfel încât patrulaterul determinat de imaginile rădăcinilor ecuației are aria maximă.

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a XI-a

SUBIECTUL 1

Există două matrice A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, astfel încât det (A + 3B) = 5 și det (A + 17B) = 13?

SUBIECTUL 2

Să se determine funcțiile continue $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = e^{x-x^4} \cdot f(x^2)$, $\forall\, x \in (0,\infty)$.

SUBIECTUL 3

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat și $a_j \in \mathbb{R}^*$, $j = \overline{1,n}$. Considerăm A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ și

$$a_{ij} = \sum_{k=i-1}^{n-1} (k+2-i)\cdot a_j^k \qquad \text{iar} \qquad B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \quad \text{cu} \qquad b_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_k^{j-1}$$

pentru orice $i = \overline{1,n}$ și orice , $j = \overline{1,n}$. Arătați că A și B au același rang.

SUBIECTUL 4

Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un șir de numere reale pozitive. Dacă șirul $\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)_{n\ge1}$ este convergent, demonstrați

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n^2} = 0.$$

MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XVII-a, 7– 8 Aprilie 2017

CLASA a XII-a

SUBIECTUL 1

Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx\right)^{\frac{1}{\ln n}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\ .$$

SUBIECTUL 2

Fie f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\cdot f(x)dx = 2\ .$

Să se arate că $\int_0^1 (f'(x))^2\ dx \geq 120$ și să se determine funcția f pentru care are loc egalitatea.

SUBIECTUL 3

Fie p un număr prim și n $\geq$ p un număr natural. Să se determine numărul polinoamelor din $\mathbb{Z}_p[X]$ de grad n a căror funcție polinomială asociată este un morfism de grupuri de la grupul $(\mathbb{Z}_p,+)$ la el însuși.

SUBIECTUL 4

Fie funcția f: $[0,1] \to\ \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}, & x\in(0,1] \\ 1\ , & x=0 \end{cases}$.

Prin {a} întelegem partea fracționară a numărului real a.

a) Demonstrați că funcția f este integrabilă.

b) Calculați $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left\{\frac{n}{\sqrt{1}}\right\}+\left\{\frac{n}{\sqrt{2}}\right\}+\left\{\frac{n}{\sqrt{3}}\right\}+\ \dots+\left\{\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right\}+\left\{\frac{n}{\sqrt{n^2}}\right\}}{n^2}$